

Teoria dell'informazione
a.a. 2007/08
Compito del 18/2/2008

Cognome: _____ Nome: _____

Matricola: _____ E-mail: _____

Parte I

1. Si dimostri che $I(X; Y) = H(X) - H(X|Y)$.
2. Si costruisca un codice ottimale ternario per la seguente variabile aleatoria X :

$$\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 & x_7 & x_8 \\ 0.22 & 0.02 & 0.20 & 0.18 & 0.05 & 0.08 & 0.15 & 0.10 \end{pmatrix}.$$

Si stabilisca se la lunghezza media del codice ottenuto coincide con l'entropia di X (in base 3) *senza calcolare né l'una né l'altra*.

3. Si stabilisca se la seguente affermazione è vera o falsa: "Sia C un codice di sorgente binario con lunghezze di parola $l_1, \dots, l_n$. Se

$$\sum_i 2^{-l_i} \leq 1$$

allora C è istantaneo." Nel primo caso si fornisca una dimostrazione, nel secondo un controesempio.

4. Si fornisca la definizione di canale debolmente simmetrico e si ricavi l'espressione della sua capacità. Si faccia inoltre un esempio di canale debolmente simmetrico, ma non simmetrico.

Parte II

1. Sia X una variabile aleatoria discreta e sia C un codice ottimale D -ario per X univocamente decodificabile. Si dimostri che

$$H_D(X) \leq L(C) < H_D(X) + 1.$$

In quale caso $H_D(X) = L(C)$?

2. Si diano due definizioni per il tasso entropico di un processo stocastico e si enunci e si dimostri una condizione sufficiente per la loro esistenza.
3. Si enunci e si dimostri la disuguaglianza di Fano e la si utilizzi per dimostrare l'inverso del secondo teorema di Shannon (che andrà enunciato anch'esso).