Analisi e Progetto di Algoritmi
a.a. 2006/07
Compito del 18/02/2008

Cognome: ___________________________ Nome: ___________________________

Matricola: ___________________________ E-mail: ___________________________

Parte I

1. Una sequenza non crescente di numeri interi non negativi $\mathbf{d} = (d_1,\ldots,d_n)$ si dice *grafica*, se è possibile costruire un grafo non orientato che abbia **d** come "degree-sequence". Si stabilisca, giustificando la risposta, se le seguenti sequenze sono grafiche o meno:
   $\mathbf{d}_1 = (6, 6, 5, 4, 3, 3, 1)$, $\mathbf{d}_2 = (7, 6, 5, 4, 3, 3, 2)$, $\mathbf{d}_3 = (4, 4, 3, 3, 2, 2)$, $\mathbf{d}_4 = (5, 4, 4, 3, 2, 1)$.

2. Sia $G = (V, E)$ un grafo orientato pesato sugli archi (con funzione peso w: $E \rightarrow \mathbf{R}$) e sia $s \in V$. Si mostri che non esiste un arco $(u,v) \in E$ per cui valga: $\delta(s,v) > \delta(s,u) + w(u,v)$.

3. Si scriva un algoritmo di complessità $O(n^2 \log n)$ per determinare le distanze tra tutte le coppie di vertici in una foresta G avente pesi sugli archi positivi, dove n è il numero di vertici in G.

4. Si mostri con un esempio come il problema ABBINAMENTO MASSIMO (in un grafo bipartito) sia riducible polinomialmente al problema MASSIMO INSIEME INDIPENDENTE. E' una riduzione conveniente? Perché?

Parte II

1. Sia $G=(V,E)$ un grafo non orientato, connesso e pesato avente tutti i pesi distinti. Sia C un ciclo di G e sia (u,v) l'arco in C avente peso massimo. Si stabilisca se esiste o meno in G un albero di copertura minimo che contiene l'arco (u,v). Potremmo dire lo stesso se i pesi sugli archi non fossero distinti? Giustificare formalmente le risposte.

2. Si scriva l'algoritmo di "moltiplicazione di matrici" per il problema dei cammini minimi tra tutte le coppie, si fornisca la sua complessità computazionale e si simuli la sua esecuzione sulla seguente matrice:

$$W = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 4 & \infty & 3 \\ 2 & 0 & 8 & \infty & 1 \\ 6 & 2 & 0 & 4 & 3 \\ 1 & \infty & \infty & 0 & 5 \\ \infty & \infty & \infty & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

3. Dato un grafo non orientato $G = (V,E)$, una *copertura di vertici* per G è un sottoinsieme di vertici $V' \subseteq V$ che contiene almeno uno dei due estremi di ciascun arco in E, cioè: $\forall (u,v) \in E : u \in V' \vee v \in V'$.

   Si considerino i problemi decisionali COPERTURA-DI-VERTICI:

   ISTANZA: Un grafo non orientato G e un intero positivo k.
   DOMANDA: Esiste una copertura di vertici di dimensione k per G?

   e N-REGINE:

   ISTANZA: Una scacchiera $n \times n$.
   DOMANDA: E' possibile disporre n regine sulla scacchiera in modo che nessuna sia in grado di attaccare le altre? (Si ricordi che la regina può muoversi in orizzontale, in verticale e in diagonale).

   Si mostri che N-REGINE$\in$NP e che N-REGINE $\leq_P$ COPERTURA-DI-VERTICI. Da questo, possiamo affermare che N-REGINE è NP-completo? Perché?