Analisi e Progetto di Algoritmi
a.a. 2007/08
Compito del 17/07/2008

Cognome: ________________________________ Nome: ________________________________

Matricola: ________________________________ E-mail: ________________________________

Nota: *Risposte prive di adeguata giustificazione e simulazioni di algoritmi svolte in modo approssimativo e/o superficiale non verranno presi in considerazione ai fini della valutazione del compito.*

Parte I

1. La *chiusura transitiva* di un grafo non orientato $G = (V, E)$ si definisce come il grafo $\Gamma(G) = (\Gamma(V), \Gamma(E))$ dove:
   - $\Gamma(V) = V$,
   - $\Gamma(E) = \{ (u,v)\in V\times V$: esiste un cammino in G tra u e v $\}$.

   Si stabilisca se la seguente affermazione è vera o falsa: «Se G non è connesso, allora $\Gamma(\overline{G})$ è completo» (dove $\overline{G}$ rappresenta il complemento di G). Nel primo caso si fornisca una dimostrazione, nel secondo un controesempio.

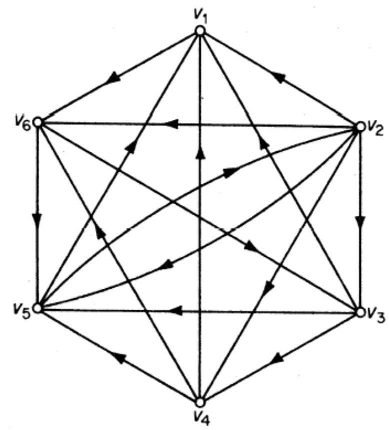
2. Si descrivano **due algoritmi** di complessità $O(|V|^3)$ per determinare i cammini minimi tra tutte le coppie di vertici in un grafo orientato sparso $G = (V, E)$ senza cicli negativi, ma con possibili pesi negativi.

3. Si descriva un algoritmo di complessità $O(|V|^2)$ per determinare una clique massimale all'interno di un grafo non orientato $G = (V, E)$.

4. Nel maggio del 2000, il *Clay Mathematics Institute* ha individuato "sette problemi del millennio" e ha messo a disposizione un premio di sette milioni di dollari (uno per ogni problema) per coloro che riescano a risolverli (`www.claymath.org/millennium`). Uno di questi problemi, la "congettura di Poincaré", è stato risolto nel 2002 dal matematico russo Grigori Perelman (che ha rifiutato il premio). Un altro problema, tuttora irrisolto, consiste nel dimostrare o confutare la congettura P≠NP. Si descriva il problema dettagliatamente, si spieghi perché riveste tanta importanza e qual è l'opinione dominante dei ricercatori sull'argomento, e si spieghi infine perché l'algoritmo sviluppato nell'esercizio precedente non consente di ottenere il premio Clay.

Parte II

1. Si scriva l'algoritmo di Dijkstra (con le relative procedure), si discuta dettagliatamente la sua complessità computazionale e lo si utilizzi (simulando accuratamente l'esecuzione) per determinare i cammini più brevi (aventi cioè il minor numero di archi) tra il vertice v_1 e i rimanenti vertici nel seguente grafo:



2. Il problema SEGMENTAZIONE-DI-IMMAGINI consiste nel partizionare un'immagine I (cioè una matrice di pixel) in due regioni omogenee: la "figura" F (più chiara) e lo "sfondo" S (più scuro). A ciascun pixel i è associato un valore x_i compreso tra 0 e 1 che rappresenta il livello di grigio, o intensità, del pixel (0 rappresenta il nero e 1 rappresenta il bianco). Una tecnica rudimentale per dividere un'immagine in figura e sfondo è quella di considerare ciascun pixel i isolatamente e decidere di assegnarlo alla figura (F) se $x_i > 0.5$, e allo sfondo (S) altrimenti. In questo modo, però, si trascura l'influenza che ciascun pixel ha sui suoi "vicini" (pixel adiacenti). In particolare, se molti dei vicini del pixel i appartengono alla figura è verosimile che anche i vi debba appartenere. Possiamo quindi assegnare a ciascuna coppia di pixel vicini (i, j) un numero positivo σ_{ij} che riflette il grado di "similarità" tra i e j (o, in altri termini, la penalizzazione in cui si incorre nell'assegnare i e j a due regioni diverse). Ad esempio, si può porre $\sigma_{ij} = \exp\{-|x_i - x_j|\}$. Il problema della segmentazione delle immagini può essere quindi formulato come il problema di trovare una partizione (F, S) dell'immagine I che minimizzi la seguente misura:

$$\phi(F,S) = \sum_{i \in F}(1 - x_i) + \sum_{j \in S} x_j + \sum_{i \in F} \sum_{j \in S \cap N(i)} \sigma_{ij}$$

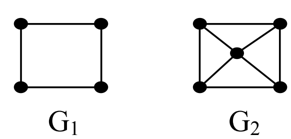
dove $N(i)$ indica l'insieme dei vicini del pixel i (e quindi la terza sommatoria è estesa a tutte le coppie di pixel vicini assegnati a regioni diverse).

Si mostri che SEGMENTAZIONE-DI-IMMAGINI $\leq_P$ FLUSSO-MASSIMO e si descriva un algoritmo efficiente per la sua risoluzione. (Suggerimento: si costruisca una rete di flusso dove la sorgente rappresenta la "figura", il pozzo lo "sfondo" e i vertici intermedi i pixel dell'immagine.)

3. Il problema decisionale ISOMORFISMO-DI-SOTTOGRAFI è definito come segue:

ISTANZA: Due grafi non orientati $G_1 = (V_1, E_1)$ e $G_2 = (V_2, E_2)$, con $|V_1| \leq |V_2|$.
DOMANDA: Esiste un sottografo (indotto) di G_2 isomorfo a G_1?

Per esempio, la seguente coppia di grafi rappresenta un'istanza positiva per il problema:



Si dimostri che ISOMORFISMO-DI-SOTTOGRAFI è NP-Completo. (Suggerimento: si consideri il problema CLIQUE.)