

Analisi e Progetto di Algoritmi

a.a. 2005/06

Compito del 14/9/2006

Cognome: _____ Nome: _____

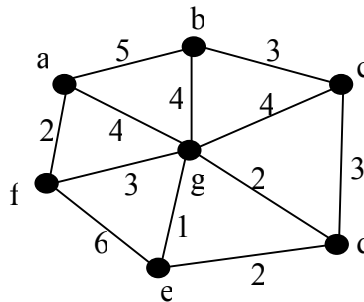
Matricola: _____ E-mail: _____

Parte I

1. Sia $G=(V,E)$ un grafo non orientato con n vertici. Si stabilisca se la seguente affermazione è vera o falsa (fornendo una dimostrazione nel primo caso, un controesempio nel secondo): «Se $\deg(u) > n/2$ per ogni vertice $u \in V$, allora G è ciclico».
2. Si scriva un algoritmo per determinare se in un grafo orientato pesato esistono cicli di peso positivo raggiungibili da un determinato vertice s . (In altri termini, l'algoritmo dovrà fornire TRUE in caso affermativo e FALSE in caso contrario.) Si fornisca inoltre la sua complessità computazionale.
3. Sia $G=(V,E)$ una rete di flusso con funzione capacità $c:V \times V \rightarrow \mathbf{R}$, f un flusso in G e si supponga che per ogni taglio (S,T) in G risulti $|f| < c(S,T)$. Si stabilisca quale delle seguenti affermazioni è vera e quale è falsa (giustificando tecnicamente la risposta, altrimenti l'esercizio non verrà valutato):
 - a) f è un flusso massimo;
 - b) la rete residua G_f contiene cammini aumentanti;
 - c) esiste un taglio (A,B) in G per il quale si ha: $f(A,B) = c(A,B)$.
4. Si definisca la classe dei problemi NP-completi e si stabilisca quali tra i seguenti problemi vi appartengono (giustificando tecnicamente la risposta):
 - a) INSIEME INDIPENDENTE: dato un grafo non orientato G e un intero k , esiste in G un insieme indipendente con k vertici?
 - b) FLUSSO: data una rete di flusso a capacità intere G e un intero k , esiste un flusso in G con valore maggiore o uguale a k ?
 - c) GRAFO-NON-HAMILTONIANO: dato un grafo non orientato G , G è non-Hamiltoniano?

Parte II

1. Si scriva l'algoritmo di Prim, si discuta dettagliatamente la sua complessità computazionale e lo si utilizzi (simulandone accuratamente l'esecuzione) per determinare **due** alberi di copertura minimi nel seguente grafo:



2. Si scriva l'algoritmo basato sulla "moltiplicazione di matrici" (usando la tecnica della quadratura ripetuta) per il problema dei cammini minimi tra tutte le coppie, se ne dimostri la correttezza e si fornisca la sua complessità computazionale. Si simuli inoltre la sua esecuzione sul grafo rappresentato dalla seguente matrice:

$$W = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 4 & \infty & 3 \\ 2 & 0 & 8 & \infty & 1 \\ 6 & 2 & 0 & 4 & 3 \\ 1 & \infty & \infty & 0 & 5 \\ \infty & \infty & \infty & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

3. Si definisca il problema CLIQUE e si dimostri che si tratta di un problema NP-completo.