Analisi e Progetto di Algoritmi
a.a. 2004/05
Compito del 12/9/2005

Cognome: ______________________________ Nome: ______________________________

Matricola: ______________________________ E-mail: ______________________________

Parte I

1. La *frontiera* di un albero *G* è definita come l'insieme dei vertici di *G* che hanno grado pari a 1. Si dimostri che se da un albero si rimuovono alcuni suoi vertici, insieme agli archi ad essi incidenti, il grafo risultante è ancora un albero <u>se e solo se</u> i vertici eliminati appartengono alla frontiera. (Si noti la doppia implicazione.)

2. Si scriva l'algoritmo di Prim e si fornisca la sua complessità computazionale.

3. Sia *G* un grafo orientato sparso con pesi sugli archi positivi. Si scriva un algoritmo per determinare le distanze tra tutte le coppie di vertici in *G* che sia (asintoticamente) più efficiente dell'algoritmo di Floyd-Warshall.

4. Si dimostri che se f è un flusso in una rete di flusso G con sorgente s e pozzo t, e se (S,T) è un taglio in G, allora il flusso netto attraverso (S,T) è $f(S,T) = |f|$.

5. Si definiscano le classi di complessità P, NP, NPC, e si dica quali delle seguenti affermazioni è vera (giustificando le risposte):
   (*a*) $NP \subseteq P$ (*b*) $P \subseteq NP$ (*c*) $P \cup NPC = NP$ (*d*) $P \cap NPC \neq \emptyset \Rightarrow P = NP$

Parte II

1. La seguente tabella fornisce le distanze (in unità di 100 miglia) tra gli aeroporti delle città di Londra, Città del Messico, New York, Parigi, Pechino e Tokyo:

	L	*CM*	*NY*	*Pa*	*Pe*	*T*
L	–	56	35	2	51	60
CM	56	–	21	57	78	70
NY	35	21	–	36	68	68
Pa	2	57	36	–	51	61
Pe	51	78	68	51	–	13
T	60	70	68	61	13	–

   Utilizzando l'algoritmo di Kruskal, si determini un albero di copertura minimo per il grafo corrispondente.

2. Si scriva l'algoritmo di Floyd-Warshall per il problema dei cammini minimi tra tutte le coppie, si fornisca la sua complessità computazionale, e si simuli la sua esecuzione sulla seguente matrice:

$$W = \begin{bmatrix} 0 & 4 & 5 & \infty & \infty & \infty & \infty \\ \infty & 0 & 6 & 3 & 10 & \infty & \infty \\ \infty & \infty & 0 & 4 & \infty & 9 & \infty \\ \infty & \infty & 3 & 0 & 6 & 3 & \infty \\ \infty & \infty & \infty & 4 & 0 & 3 & 2 \\ \infty & \infty & \infty & \infty & 2 & 0 & 2 \\ \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & 0 \end{bmatrix}$$

3. Si enunci il problema dell'abbinamento massimo in un grafo bipartito e si sviluppino due algoritmi basati, il primo, su una riduzione al problema MASSIMO INSIEME INDIPENDENTE e il secondo su una riduzione a FLUSSO MASSIMO (mostrando in entrambi i casi la correttezza della riduzione). Si discutano vantaggi e svantaggi dei due approcci.