

Analisi e Progetto di Algoritmi

a.a. 2006/07

Compito del 11/9/2007

Cognome: _____ Nome: _____

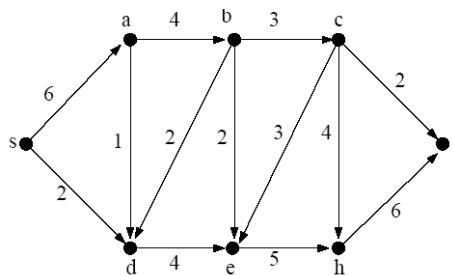
Matricola: _____ E-mail: _____

Parte I

1. Sia G un grafo non orientato. Si stabilisca quale delle seguenti affermazioni è vera e quale è falsa (fornendo dimostrazioni nel primo caso, controesempi nel secondo):
 - a) il numero di vertici di G con grado dispari è pari
 - b) il numero di vertici di G con grado pari è dispari
2. Sia $G = (V, E)$ un grafo orientato pesato sugli archi (con funzione peso $w: E \rightarrow \mathbf{R}$) e sia $s \in V$. Si mostri che per ogni $(u, v) \in E$ si ha: $\delta(s, v) \leq \delta(s, u) + w(u, v)$.
3. Siano G una rete di flusso, f un flusso di G e G_f la corrispondente rete residua. Si mostri che se G_f non ammette cammini aumentanti, allora f è un flusso massimo.
4. Si stabilisca se ISOMORFISMO-DI-GRAFI \in NP e in caso affermativo fornire una dimostrazione.

Parte II

1. Si enunci e si dimostri la proprietà fondamentale degli alberi di copertura minimi e la si utilizzi per dimostrare la correttezza degli algoritmi di Kruskal e di Prim.
2. Si determini un taglio minimo nella seguente rete di flusso (con sorgente s e pozzo t)



utilizzando l'algoritmo di Edmonds-Karp e simulandone accuratamente l'esecuzione.

3. Dato un grafo non orientato $G = (V, E)$, una *copertura di vertici* per G è un sottoinsieme di vertici $V' \subseteq V$ che contiene almeno uno dei due estremi di ciascun arco in E , cioè:

$$\forall (u, v) \in E : u \in V' \vee v \in V'.$$

Si consideri il problema decisionale COPERTURA-DI-VERTICI:

ISTANZA: Un grafo non orientato G e un intero positivo k .

DOMANDA: Esiste una copertura di vertici di dimensione k per G ?

e si dimostri che è NP-completo. Si mostri inoltre che ISOMORFISMO-DI-GRAFI \leq_P COPERTURA-DI-VERTICI. Da questo, possiamo affermare che ISOMORFISMO-DI-GRAFI è NP-completo? Perché?