

Analisi e Progetto di Algoritmi

a.a. 2005/06

Compito del 5/7/2005

Cognome: _____ Nome: _____

Matricola: _____ E-mail: _____

Parte I

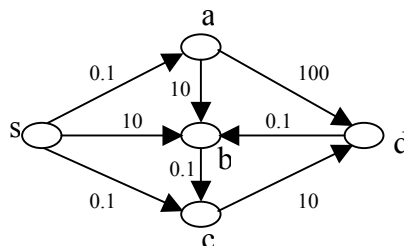
1. Si dimostri la seguente proposizione: «Se $G=(V,E)$ è una foresta con n vertici, allora esiste almeno un vertice $u \in V$ avente grado $\deg(u) \leq n/2$.» (Suggerimento: si proceda per assurdo.)
2. Si scriva l'algoritmo di Kruskal per il problema degli alberi di copertura minimi e si fornisca la sua complessità computazionale.
3. Si supponga di cambiare l'istruzione **while** $Q \neq \emptyset$ dell'algoritmo di Dijkstra, con la seguente: **while** $|Q| > 1$. Questo cambio fa eseguire il ciclo $|V|-1$ volte invece di $|V|$. L'algoritmo proposto è corretto? (Giustificare la risposta, altrimenti l'esercizio non verrà valutato.)
4. Si dimostri che se f è un flusso in una rete di flusso $G=(V,E)$ con sorgente s e pozzo t , allora $f(s,V) = f(V,t)$.
5. Si stabilisca se il seguente ragionamento è errato o meno: «Il problema ISOMORFISMO-DI-GRAFI può essere ridotto polinomialmente al problema CLIQUE (utilizzando il grafo di associazione). Il problema CLIQUE è NP-completo. Quindi, il problema ISOMORFISMO-DI-GRAFI è NP-completo.»

Parte II

1. Si enunci e si dimostri la proprietà fondamentale degli alberi di copertura minimi.
2. Dato un grafo orientato e pesato $G=(V,E)$ con pesi strettamente positivi, cioè $w(u,v) > 0$ per ogni $(u,v) \in E$, si vuole determinare se esiste in G un ciclo $c = \langle x_0, x_1, \dots, x_q \rangle$ raggiungibile da un dato vertice "sorgente" s , in cui il prodotto dei pesi sugli archi sia minore di 1, cioè:

$$\prod_{i=1}^q w(x_{i-1}, x_i) < 1.$$

Si sviluppi un algoritmo per risolvere questo problema, se ne discuta la correttezza e si determini la sua complessità computazionale. Inoltre, si simuli la sua esecuzione sul seguente grafo:



(Suggerimento: si pensi ad una opportuna trasformazione dei pesi del grafo e si utilizzino algoritmi noti.)

3. Si scriva l'algoritmo di Edmonds-Karp, si discuta la sua correttezza e si determini la sua complessità. Si simuli inoltre la sua esecuzione sul grafo dell'esercizio precedente, considerando come sorgente il vertice s , come pozzo il vertice d , e interpretando i pesi sugli archi come capacità.