

Analisi e Progetto di Algoritmi

a.a. 2005/06

Compito del 3/7/2006

Cognome: _____ Nome: _____

Matricola: _____ E-mail: _____

Parte I

1. Si stabilisca se le seguenti affermazioni sono vere o false (fornendo controesempi e/o dimostrazioni):
 - a) In un grafo non orientato il numero di vertici di grado dispari è pari;
 - b) In un grafo non orientato il numero di vertici di grado pari è dispari.
2. Si scriva l'algoritmo di Bellman-Ford (e le procedure esterne utilizzate) per il problema dei cammini minimi con sorgente singola e si fornisca la sua complessità computazionale.
3. Sia f un flusso in una rete di flusso $G=(V,E)$ e G_f la corrispondente rete residua. Si mostri che se g è un flusso in G_f , allora $f+g$ è un flusso in G .
4. Si definisca la classe dei problemi NP e si stabilisca quali, tra i seguenti problemi, vi appartengono (giustificando tecnicamente la risposta):
 - a) CLIQUE: dato un grafo non orientato G e un intero k , esiste in G una clique con k vertici?
 - b) CICLO-NEGATIVO: dato un grafo orientato G ed un vertice sorgente s , esiste in G un ciclo di peso negativo raggiungibile da s ?
 - c) ABBINAMENTO: dato un grafo bipartito G e un intero k , esiste un abbinamento in G di cardinalità k ?
 - d) GRAFO-NON-HAMILTONIANO: dato un grafo non orientato G , G è non-Hamiltoniano?

Parte II

1. Siano: $G=(V,E)$ un grafo non orientato e pesato, $(S,V\setminus S)$ un taglio arbitrario in G e (u,v) un arco di G che attraversa il taglio $(S,V\setminus S)$.

L'arco (u,v) si dice *leggero* se il suo peso $w(u,v)$ è minore o uguale dei pesi di tutti gli archi che attraversano il taglio, mentre si dice *strettamente leggero* se $w(u,v)$ è strettamente minore dei pesi di tutti gli archi, diversi da (u,v) , che attraversano il taglio.

Si considerino le seguenti affermazioni e si stabilisca se sono vere o false. Nel primo caso si fornisca una dimostrazione dettagliata ed esauriente, nel secondo un controesempio.

 - a) Se l'arco (u,v) è leggero, allora esiste un albero di copertura minimo di G che lo contiene;
 - b) Se l'arco (u,v) è leggero, allora tutti gli alberi di copertura minimi di G lo contengono;
 - c) Se l'arco (u,v) è strettamente leggero, allora tutti gli alberi di copertura minimi di G lo contengono.
2. Si scriva l'algoritmo di Floyd-Warshall per il problema dei cammini minimi tra tutte le coppie, se ne dimostri la correttezza e si fornisca la sua complessità computazionale. Si simuli inoltre la sua esecuzione sul grafo rappresentato dalla seguente matrice:

$$W = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 4 & \infty & 3 \\ 2 & 0 & 8 & \infty & 1 \\ 6 & 2 & 0 & 4 & 3 \\ 1 & \infty & \infty & 0 & 5 \\ \infty & \infty & \infty & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

3. Si scriva l'algoritmo di Ford-Fulkerson per determinare un flusso massimo in una rete di flusso e si discuta dettagliatamente della sua: a) terminazione, b) correttezza e c) complessità computazionale. L'algoritmo è polinomiale? In caso negativo, come si può rendere tale?

Si simuli infine la sua esecuzione sulla rete di flusso rappresentata dalla matrice precedente, interpretando i pesi sugli archi come capacità e utilizzando il primo e l'ultimo vertice come sorgente e pozzo, rispettivamente.