

UNIVERSITÀ CA' FOSCARI – VENEZIA
Facoltà di Scienze Matematiche, Fisiche e Naturali
Corso di Laurea in Informatica (Magistrale)

Tesi di Laurea

Laureando: Luca Cosmo
Matricola: 807107

Corrispondenza densa tra forme
attraverso embedding di superficie e correlazione sferica

Relatore: Chiar.mo prof. Andrea Torsello

Anno Accademico 2010-2011

Indice

1	Introduzione	3
2	Corrispondenze tra forme	7
2.1	Trasformazioni non rigide isometriche	9
3	Geometria della sfera	15
3.1	Coordinate sferiche	15
3.2	Coordinate baricentriche sferiche	17
4	Il nostro metodo	21
5	Embedding sferico di superficie	25
5.1	Parametrizzazione sferica	26
5.2	Minimizzazione distorsione globale	30
5.3	Discesa del gradiente	31
5.4	Initial Guess	34
5.5	La procedura	37
6	Allineamento sferico	41
6.1	Mappa della superficie	42

6.1.1	Densità geodesica	42
6.1.2	Densità geodesica locale	45
6.2	Correlazione Sferica	47
6.2.1	Le armoniche sferiche	48
7	Esperimenti	53
7.1	Metodo di valutazione	53
7.2	Organizzazione degli esperimenti e Dataset	54
7.3	Valutazione esperimenti	59
7.3.1	Distribuzione dell'errore di matching al variare di r_g	60
7.3.2	Distribuzione dell'errore nella forma	66
7.3.3	Stima dell'errore	67
7.3.4	Errore di allineamento	71
7.3.5	Indipendenza dalla scala	73
7.3.6	Robustezza al campionamento	74
8	Conclusioni	77
8.1	Sviluppi futuri	78

Sommario

Il riconoscimento e confronto di forme tridimensionali è uno strumento molto importante in vari ambiti, dall'acquisizione tridimensionale alla diagnosi di patologie in ambito medico. La ricerca di corrispondenze tra forme che differiscono per trasformazioni rigide (scala, rotazione e traslazione) è un campo di ricerca maturo. La stessa cosa non si può dire quando le due forme differiscono per trasformazioni più complesse (non-rigida), come può essere una figura umana in diverse posizioni. In questa tesi viene proposto un nuovo approccio alla risoluzione di quest'ultimo problema che si compone di due fasi. Nella prima fase la superficie della figura viene mappata sulla sfera in modo da ridurre le trasformazioni tra le forme in rotazioni sulle corrispondenti sfere. A tale scopo proponiamo un metodo di embedding sferico che cerca di minimizzare l'errore isometrico riportando allo stesso tempo sulla sfera la corretta triangolazione. La seconda fase consiste nell'allineamento delle due sfere e nell'individuazione delle corrispondenze. La validità del metodo proposto è confermata mediante la sua sperimentazione sul un noto dataset di trasformazioni non rigide.

Capitolo 1

Introduzione

La possibilità di riconoscere e poter confrontare forme tridimensionali è molto utile in diversi ambiti. Per esempio nell'acquisizione di immagini tridimensionali un problema classico è quello di ricomporre una superficie acquisita da diverse angolazioni, per fare ciò è necessario poter riconoscere e trovare le corrispondenze fra le zone comuni di ciascuna scansione. Inoltre con la diffusione sempre maggiore di immagini e riprese tridimensionali la classificazione di quest'ultime in modo automatizzato cresce di importanza; per identificare una scena è essenziale poter riconoscere gli oggetti e soggetti, anche in movimento, che la compongono. Di grande importanza nella ricerca medica è la catalogazione di scansioni tridimensionali del cervello umano e il loro confronto al fine di ricercare corrispondenza tra la deformazione del cervello e alcune patologie[3][18]. Altre applicazioni in campo medico sono, per esempio, il monitoraggio dello stato di avanzamento della sclerosi [2]. In questi casi si parla prevalentemente di ricerca di corrispondenze tra trasformazioni non rigide (*matching non-rigido*), cioè in cui il rapporto delle distanze euclidee tra

i punti della forma non è mantenuto dalla trasformazione.

Data una forma sorgente e un target, lo scopo di un algoritmo di *matching* è quindi quello di posizionare i punti della forma sorgente nella scena in cui risiede il target. In ambito di registrazione rigida, cioè

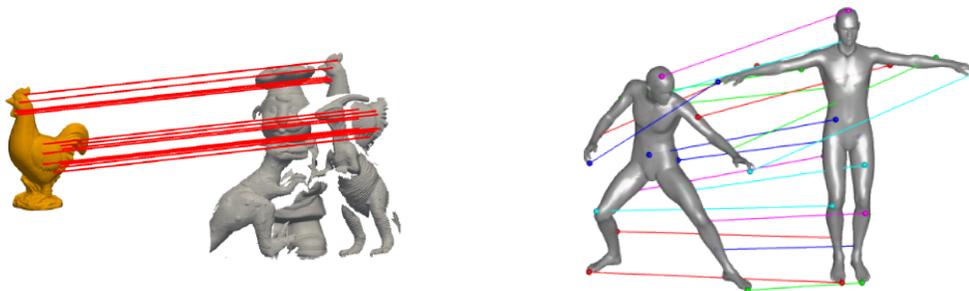


Figura 1.1: Esempi di *matching* rigido (sinistra) e non rigido(destra).

quando le due superfici differiscono per una trasformazione rigida (scala, traslazione, rotazione), si sono ottenuti importanti risultati e gli algoritmi principali si basano sul Iterative Closest Point (ICP)[4]. Esso ricerca la trasformazione che minimizza la distanza tra due insieme di punti mediante l'iterazione delle fasi di ricerca di corrispondenze e loro riposizionamento. Per quanto riguarda la ricerca di corrispondenze nell'ambito delle trasformazioni non rigide tuttavia non c'è uno standard di fatto. I principali metodi si basano sul confronto tra grafi che descrivono la topologia delle forme [11], su descrittori ottenuti mediante l'analisi delle caratteristiche della triangolazione [1], diffusione del calore (*heat kernel*)[8, 39] sul'uso di mappe conformi [26, 18, 24, 29] e delle distanze geodesiche [7].

L'idea che viene sviluppata in questa tesi è quella di ridurre il problema della corrispondenza tra forme isometriche tridimensionali in un

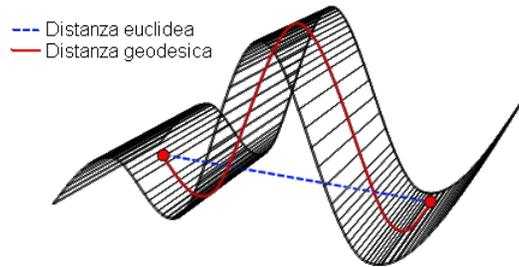


Figura 1.2: Distanza geodesica e distanza euclidea. La distanza geodesica tra due punti è la lunghezza della più corta curva sulla superficie che li unisce.

problema di allineamento sferico, basandosi sul fatto che con un'opportuna parametrizzazione sferica delle forme, le deformazioni isometriche si trasformano in rotazione della sfera.

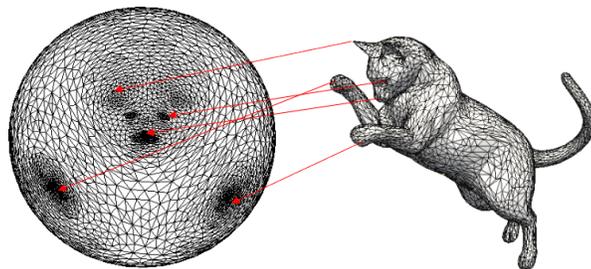


Figura 1.3: Esempio di *embedding* sferico. Si può vedere come la triangolazione del gatto sia stata riportata sulla sfera.

Formuliamo un algoritmo per effettuare un *embedding sferico* che preservi in modo più accurato possibile le distanze geodesiche tra i vertici, cioè la lunghezza della più breve curva sulla superficie della forma che li unisce. L'approccio usato è simile al GMDS [7], in cui si fa uso della tecnica del Multidimensional Scaling (MDS [5]) per rappresentare un'in-

formazione n -dimensionale quale la distanza tra tutte le coppie di vertici, in uno spazio bidimensionale (piano o superficie di una sfera). A differenza dell'MDS, il nostro metodo usa le coordinate baricentriche per definire la posizione di ciascun punto sulla superficie della sfera, in questo modo vengono evitati i problemi di sovrapposizione e intersezione tra triangoli. Per rendere il nostro metodo indipendente dal campionamento o dalla topologia della forma, l'allineamento delle sfere non viene fatto sui vertici ma utilizzando un descrittore della superficie. Negli esperimenti usiamo un descrittore della superficie ricavato dal flusso geodesico, tuttavia potrebbe essere usato anche un qualsiasi altro descrittore invariante alle trasformazioni isometriche, come l'*heat kernel*[8].

La tesi è organizzata nel seguente modo: il capitolo 2 descrive in modo generale le principali tecniche usate per il problema delle corrispondenze tra forme con trasformazioni non rigide; nel capitolo 3 viene introdotta qualche semplice nozione sulla geometria della sfera che sarà utile nel proseguo della tesi; nel capitolo 4 descriviamo i fondamenti teorici e l'implementazione pratica del nostro metodo. Il capitolo 5 è dedicato ad un approfondimento dell'embedding sferico, mentre il 6 è dedicato al metodo di allineamento delle sfere. Infine, in 7, presentiamo i risultati ottenuti dal nostro metodo nel dataset SHREC 2010 [6].

Capitolo 2

Corrispondenze tra forme

La ricerca di corrispondenze tra due forme è un problema molto importante in diversi ambiti, come la scansione 3D anche di oggetti o soggetti in movimento, la classificazione e segmentazione e la diagnostica in campo medico. Data una forma sorgente e un target, lo scopo è di posizionare i punti della forma sorgente nella scena in cui risiede il target. Possiamo dare una formulazione generale della ricerca di corrispondenze come: date due superfici S e D , trovare una mappa $f : S' \subseteq S \rightarrow D' \subseteq D$ che associa un sottoinsieme di punti di S a un sottoinsieme di punti di D . Parliamo di sottoinsieme di punti poiché non tutti gli algoritmi di ricerca di corrispondenza riescono a fornire una mappa completa tra due superfici. A seconda delle dimensioni di S' e D' un *matching* si può definire sparso, quando i due sottoinsiemi contengono relativamente pochi punti, oppure denso.

Nei diversi ambiti di applicazione del *matching* le superfici da analizzare possono differire per forma, qualità e tipo di deformazione. Nell'ambito dell'acquisizione tridimensionale di immagini attraverso scanner

il problema del *matching* consiste nel ricomporre le diverse acquisizioni di uno stesso oggetto da più angolazioni, in modo da ottenerne il modello completo. In questo caso si parla di *matching* rigido, ossia le due superfici differiscono solo per traslazione, scala e rotazione. Ovviamente in questo caso la sfida sta nel fatto che solo parte delle due superfici corrisponde alla stessa porzione dell'oggetto acquisito. Se consideriamo invece l'ambito medico, dove l'obbiettivo può essere il confronto di organi umani per l'identificazione di deformazioni causate da determinate patologie, le deformazioni con cui si ha a che fare non sono più rigide. Sia nel campo rigido che in quello non-rigido esistono altri tipi di deformazione dovuti alla sorgente di acquisizione, come rumore, acquisizione parziale della forma, buchi e zone nascoste, scala.



Figura 2.1: Ricomposizione delle diverse scansioni di un volto umano mediante l'utilizzo dell'algoritmo ICP.

Per risolvere il problema delle corrispondenze nelle trasformazioni rigide esistono diversi algoritmi basati sul metodo dell'Iterative Closest Point (ICP) [32]. L'ICP riceve come input due insieme di punti e ne ricava la traslazione e la rotazione che li allinea minimizzando una certa misura di errore. Ad ogni iterazione esegue i seguenti passi fino ad un

criterio di stop: associa ad ogni punto della sorgente un punto della destinazione, solitamente il più vicino; stima la trasformazione che minimizza una misura di errore tra i punti associati, per esempio il quadrato della distanza; applica la trasformazione trovata e ricomincia. Un problema dell'ICP è che se i due insieme di punti sono distanti dall'allineamento ideale possono essere trovati dei minimi locali invece che quello globale. Per risolvere questo problema esistono dei metodi per effettuare un allineamento grezzo iniziale i principali sono basati sulla caratterizzazione dei punti mediante *Point Signature*[10] e *Spin Images*[25]. Per una panoramica sulla registrazione non rigida rimandiamo all'articolo di Salvi [34].

La classe di deformazioni a cui viene applicato il metodo esposto in questa tesi è quello delle deformazioni Non-Rigide Isometriche. Una deformazione Non-Rigida non mantiene più le distanze euclidee tra due punti nella superficie, ci sono tuttavia delle distanze, che vengono mantenute. Una di queste distanze è la distanza geodesica definita su una superficie di Riemann, cioè la lunghezza della più breve curva appartenete alla superficie che unisce due punti.

2.1 Trasformazioni non rigide isometriche

In una trasformazione non rigida le distanze euclidee tra i punti non vengono mantenute. Ciò comporta che le due superfici non differiscono più soltanto per trasformazioni quali scala, rotazione e traslazione. Una classica deformazione non rigida quasi isometrica è quella che si ha considerando un modello che rappresenta una figura umana in diverse posizioni. Parliamo di quasi isometria poiché la natura elastica di pelle e

muscoli umani fa sì che le distanze isometriche non vengano mantenute perfettamente.

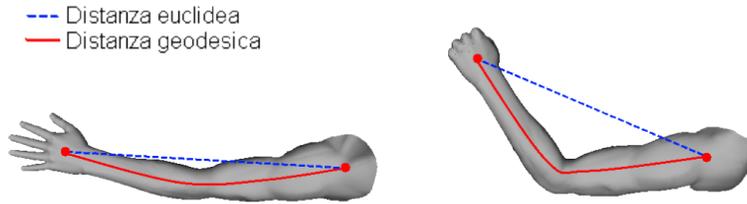


Figura 2.2: Trasformazione isometrica di un braccio umano. La distanza euclidea tra i due punti della superficie cambia, mentre la distanza geodesica (approssimata) rimane costante.

In generale dati due spazi X e Y dotati di una metrica, si dice isometria una funzione $f : X \rightarrow Y$ tale che per ogni coppia di punti $x_i, x_j \in X$ vale:

$$d_X(x_i, x_j) = d_Y(f(x_i), f(x_j)) \quad (2.1)$$

dove d_X e d_Y indicano le distanze indotte dalla metrica in X e Y . Nel caso specifico possiamo considerare le nostre forme triangolate come discretizzazione di superfici di Riemann [9], per cui la distanza tra due punti è la distanza geodesica. La distanza geodesica tra due punti è la lunghezza della geodesica, cioè la più breve curva nello spazio considerato che li connette. Date due forme con superfici $S, D \in \mathbb{R}^3$ si dice isometria una funzione $f : S \rightarrow D$ tale che la distorsione

$$disf = \sum [d_S(x, x') - d_D(f(x), f(x'))]^2 = 0 \quad (2.2)$$

In un recente benchmark di confronto dei metodi di ricerca di corrispondenze su deformazioni non rigide [6] sono stati messi a confronto

i principali metodi basati sulle corrispondenze spettrali (*Spectral Matching*), sulla diffusione del calore e il GMDS (Generalized Multidimensional Scaling). Lo *Spectral Matching* [11] pone il problema della ricerca di corrispondenze come un problema di *graph matching*, la forma triangolata viene rappresentata come un grafo i cui archi hanno peso $a_{ij} = 0$ se i due vertici non sono adiacenti, altrimenti $a_{ij} = \exp(-d^2(x_i, x_j)/\sigma^2)$ con d pari alla distanza di vertici e σ selezionato in modo che tutti i pesi cadano in un piccolo intervallo attorno ad $a = 0.5$. Il passo successivo è quello di trovare la permutazione P e la matrice di segno S che allinea i primi k autovalori della matrice di adiacenza di una figura con quelli dell'altra ed infine si trovano le corrispondenze tra i due grafi allineati. Questo metodo risulta trovare le corrispondenze esatte nel dataset di benchmark utilizzato, tuttavia non è generico poiché sfrutta il fatto che tutte le trasformazioni hanno la stessa triangolazione quindi danno origine allo stesso grafo.

La seconda classe di metodi fa uso dei descrittori di superficie basate sul comportamento della diffusione del calore [1], le corrispondenze tra i descrittori trovati nelle due superfici è quindi un problema di ottimizzazione quadratica in cui si cerca di minimizzare l'errore prodotto dalle corrispondenze, considerando anche la distanza geodesica misurata nella figura.

Infine viene presentato il GMDS (Generalized Multidimensional Scaling) [7], una generalizzazione dell'MDS. Il MDS (*Multidimensional Scaling*) è una tecnica per l'analisi statistica della similarità (o dissimilarità) di un insieme di oggetti. Permette di approssimare uno spazio M -dimensionale, dove N è il numero di oggetti in relazione, su uno spazio M -dimensionale, con M scelto a priori e generalmente minore di N ; in

questo modo si può facilitare l'analisi dei dati e, se $M = 2$ o $M = 3$, è possibile darne una rappresentazione grafica. La funzione dell'MDS è, partendo da una matrice Δ_{NxN} di similarità tra gli oggetti, trovare un degli $x_1 \dots x_n \in \mathbb{R}^M$ tali che

$$\|x_i - x_j\| \approx \delta_{i,j} \forall i, j \in I, \quad (2.3)$$

dove $\delta_{i,j} \in \Delta_{NxN}$ è la similarità tra l' i -esimo e il j -esimo oggetto e $\|\cdot\|$ è la norma del vettore, ovvero la distanza computata nello spazio \mathbb{R}^M . Il MDS può essere quindi risolto come un problema di ottimizzazione in cui si cerca di trovare gli $x_i, i = 1 \dots n$ che minimizzano la distorsione:

$$\vec{x} = \underset{x_1 \dots x_n}{\operatorname{argmin}} \sum_{i,j} [\|x_i - x_j\| - \delta_{i,j}]^2 \quad (2.4)$$

Nel nostro caso gli oggetti sono i punti della superficie e la loro dissimilarità è la loro distanza geodesica nella superficie. Utilizzando la tecnica dell'MDS riusciamo quindi a portare la ricerca di corrispondenze tra due forme isometriche S e D su uno spazio m -dimensionale in modo da ridurne i gradi di libertà. La superficie della forma S viene mappata (*embedding*) su tale spazio m -dimensionale in modo da minimizzare un funzione di stress:

$$\frac{1}{N} \sum_{i=1 \dots N} (d_{\mathbb{R}^m}(x_i, x_j) - d_S(s_i, s_j))^2 \quad (2.5)$$

dove $d_S(s_i, s_j)$ è la distanza geodesica tra s_i e s_j . La formulazione del GMDS invece effettua l'embedding della superficie di S direttamente sulla superficie di D minimizzando una funzione di stress:

$$\min_{t_i; u_{i=1}^N} \sum_{i>j} (d_S(s_i, s_j) - d_D((t_i; u_i), (t_j; u_j)))^2 \quad (2.6)$$

con la posizione d_i in D è espressa in coordinate baricentriche con pesi $u_i = \{u_{i,1}, u_{i,2}, u_{i,3}\}$ rispetto ai vertici del triangolo $t_i \in T(D)$.

Questi ultimi due metodi sono indipendenti dalla triangolazione delle forme, tuttavia al contrario del primo metodo sono in grado di trovare solo corrispondenze sparse.

Il nostro metodo si pone l'obbiettivo, invece, di trovare delle corrispondenze dense tra due trasformazioni isometriche dello stessa figura. Esso prevede di effettuare l'embedding dei modelli sulla superficie di una sfera. Al contrario dell'MDS classico tuttavia vogliamo minimizzare una funzione di stress mantenendo una corretta triangolazione della superficie sulla sfera, cioè evitando sovrapposizioni e capovolgimenti di triangoli. Le posizioni dei vari punti sono quindi espresse come coordinate baricentriche rispetto ai vertici adiacenti. Gli esperimenti hanno permesso di constatare un buon comportamento nella parte centrale della forma, mentre l'errore si accentua nelle estremità, è comunque possibile dare una stima accurata della bontà nella corrispondenza trovata e ciò ci permette di raffinare le corrispondenze meno precise. Una proprietà importante del nostro metodo è l'indipendenza dalla scala della forma e dal suo campionamento.

Capitolo 3

Geometria della sfera

In questo capitolo verranno introdotti alcuni semplici concetti sulla geometria della sfera. Il metodo sviluppato utilizza infatti delle tecniche come l'embedding sferico e la correlazione sferica che operano sulla superficie della sfera. Le coordinate sferiche sono un modo di identificare un punto $p \in \mathbb{R}^3, \|p\| = 1$ della superficie della sfera unitaria con una coppia di valori $(\theta, \Phi) \in \mathbb{R}^2$. Le coordinate baricentriche sferiche invece permettono di rappresentare un vertice $p \in \mathbb{R}^3, \|p\| = 1$ di una superficie sferica triangolata come combinazione lineare dei vertici adiacenti.

3.1 Coordinate sferiche

La superficie di una sfera unitaria è di fatto uno spazio in R^2 . Possiamo esprimere ogni punto della superficie con una coppia di valori $s = [\theta, \varphi]$, con $-\pi/2 \leq \theta \leq \pi/2$ e $0 \leq \gamma \leq 2\pi$, chiamate rispettivamente latitudine e longitudine.

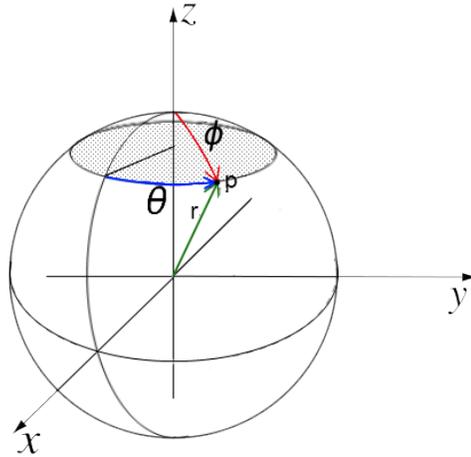


Figura 3.1: Coordinate sferiche

Dato un punto con coordinate sferiche $[\theta, \varphi]$ possiamo determinarne la sua posizione $p = [x, y, z]$ nella sfera unitaria in R^3 :

$$x = \cos(\theta)\sin(\Phi) \quad (3.1)$$

$$y = \sin(\theta)\sin(\Phi) \quad (3.2)$$

$$z = \cos(\Phi) \quad (3.3)$$

e viceversa dato un punto $[x, y, z] \in R^3$ sulla superficie di una sfera di raggio r le sue coordinate sferiche sono:

$$\Phi = \arccos(z/r) \quad (3.4)$$

$$\theta = \arctan(y/x) \quad (3.5)$$

dove l'inversa della tangente $\varphi = \arctan(y/x)$ deve essere definita prendendo in considerazione il quadrante (x, y) corretto.

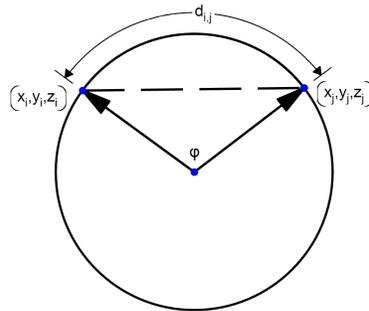


Figura 3.2: Distanza geodesica sulla sfera

Come si può vedere in Figura 3.2 la distanza geodesica tra due punti sulla superficie della sfera unitaria è data dall'arco corrispondente all'angolo Φ formato dai vettori che vanno dal centro della sfera ai due punti. Siano $p_i = [x_i, y_i, j_i]$ e $p_j = [x_j, y_j, j_j]$ due punti della superficie della sfera, la loro distanza geodesica è:

$$d_{i,j}^g = \arccos(\vec{p}_i \cdot \vec{p}_j)$$

3.2 Coordinate baricentriche sferiche

Dal momento che il nostro metodo esprime la posizione di un vertice tramite le sue coordinate baricentriche rispetto al poligono formato dai triangoli a cui appartiene, cioè come la combinazione lineare dei suoi vicini, introduciamo in questo capitolo le coordinate baricentriche sulla superficie della sfera come in [28].

Sia $P = (v_j)_{j=1\dots n}$ un poligono con vertici v_j , e siano λ_i le Coordinate

Baricentriche di v rispetto a P , allora esse soddisfano le seguenti proprietà:

$$\forall i \quad \lambda_i > 0 \quad (3.6)$$

$$\sum_i \lambda_i = 1 \quad (3.7)$$

$$\sum_i \lambda_i v_i = v \quad (3.8)$$

Una definizione di coordinate baricentriche nel caso planare per poligoni convessi e non convessi è quella delle coordinate *mean value* introdotte da Floater [14]:

$$\lambda_i = \frac{w_i}{\sum_j w_j}, w_i = \frac{\tan(\alpha_{i+1}/2) + \tan(\alpha_i/2)}{d_i} \quad (3.9)$$

dove α_i è l'angolo formato dai vettori che vanno dal punto v ai due vertici consecutivi del poligono v_i e v_{i+1} , e d_i è la distanza del vertice v_i dal punto v , come si vede in Figura 3.3.

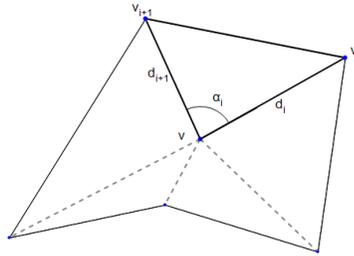


Figura 3.3: Coordinate *Mean Value* su un poligono concavo

Le coordinate baricentriche sferiche esprimono la posizione di un punto \mathbf{v} sulla superficie della sfera rispetto ai vertici v_i del poligono che lo contiene. Poiché nella sfera la precisione lineare e la somma ad uno si

contraddicono è necessario rilassare uno di questi vincoli. In particolar modo trasformiamo il vincolo 3.7 in:

$$\sum_i \lambda_i \geq 1 \quad (3.10)$$

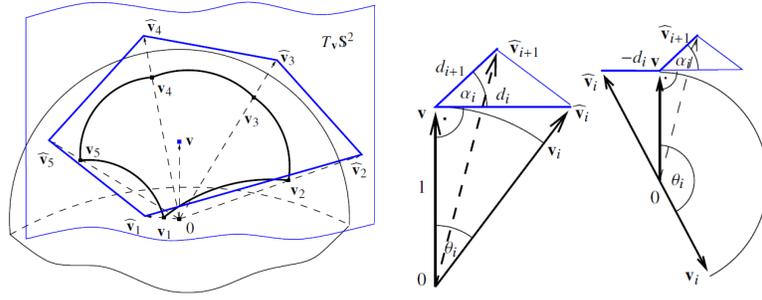


Figura 3.4: Costruzione delle coordinate baricentriche [28].

Trovare le coordinate baricentriche sferiche significa quindi trovare i coefficienti λ_i dei vettori $\mathbf{v}_i \in R^3$ di un poligono tali che rispettino i vincoli 3.6, 3.8 e 3.10. Consideriamo ora la sfera unitaria e proiettiamo i vertici v_i del poligono sulla sfera nel piano $T_v S^2$ tangente al punto v di cui vogliamo trovare le coordinate baricentriche, Figura 3.4. Siano quindi \hat{v}_i i punti proiettati sul piano T tangente a v e $\hat{\lambda}_i$ i relativi coefficienti delle coordinate *mean value*, abbiamo che:

$$v = \sum_i \lambda_i v_i, \quad \lambda_i = \langle v_i, \hat{v}_i \rangle \hat{\lambda}_i \quad (3.11)$$

Applicando quindi la formula 3.9 e considerando che $\langle v_i, \hat{v}_i \rangle = 1/\cos(\theta_i)$ e $d_i = \tan(\theta_i)$ otteniamo:

$$\lambda_i(v) = \frac{\tan(\alpha_{i+1}/2) + \tan(\alpha_i/2)}{\sin(\theta_i)} / \sum_j \cot(\theta_j) (\tan(\frac{\alpha_{j-1}}{2}) + \tan(\frac{\alpha_j}{2})) \quad (3.12)$$

Capitolo 4

Il nostro metodo

Dopo la panoramica sui metodi esistenti per il matching ed in particolare il matching non rigido visita nel Capitolo 2, vediamo ora in dettaglio il procedimento da noi proposto. In questo capitolo daremo una descrizione generale del metodo e dei principi su cui si basa e nei successivi capitoli analizzeremo approfonditamente le varie fasi. Alla fase dell'*Embedding sferico* è dedicato il 5 capitolo, mentre nel 6 tratteremo l'allineamento delle sfere.

L'obiettivo del nostro metodo è quello di ottenere una corrispondenza *coarse* (grezza) densa tra due modelli senza la presenza di bordi nella superficie (*Genus-0*), e *manifold* che differiscono tra di loro per una trasformazione isometrica. L'idea generale del metodo è quella di convertire le trasformazioni isometriche nel modello in R^3 in rotazioni nella corrispondente mappatura sferica. Sarà quindi necessario mappare le superficie dei modelli sulla superficie della sfera associata in modo da ridurre al minimo la distorsione della distanza geodesica tra tutte le coppie di punti, mantenendo al contempo la triangolazione del modello.

In un secondo momento dovremo allineare le due sfere, trovare quindi una rotazione $R \in SO(3)$ parametrizzata con α, β, γ che minimizza, per ogni punto $p \in S$ nella superficie delle sfere, la differenza di una qualche misura computata sulla superficie del modello.

La procedura che seguirà il nostro metodo è (Figura 4.1):

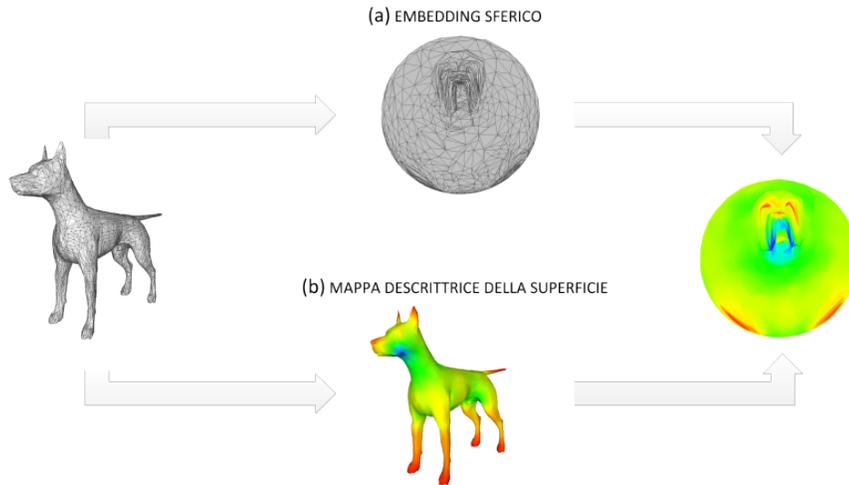
- Per ciascun modello:
 - Embedding sferico: costruzione di una mappa tra modello e superficie sulla sfera che minimizza la distorsione globale della distanza geodesica;
 - Mappa descrittrice della superficie: determinazione di una qualche misura da associare ad ogni punto della superficie che sia indipendente alle trasformazioni isometriche;
- Allineamento delle sfere in modo da minimizzare la differenza in ciascun punto della mappa descrittrice della superficie.

L'embedding sferico è la fase cruciale del nostro metodo, vogliamo infatti minimizzarne l'errore isometrico, minimizzare cioè la distorsione delle distanze geodesiche tra la forma originale S_1 e la sfera ottenuta S_2 . Per fare ciò imposteremo l'embedding come un problema di ottimizzazione in cui si cerca di trovare una mappa $f : S_1 \rightarrow S_2$ che assegna ad ogni vertice di S_1 una posizione nella sfera S_2 .

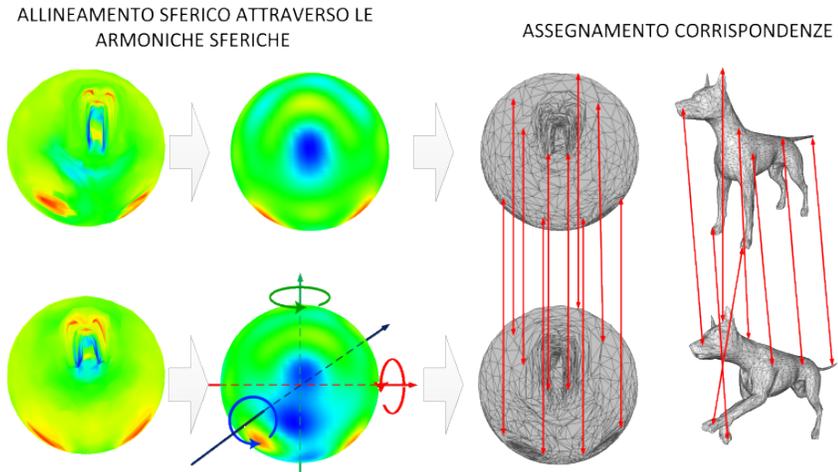
$$\operatorname{argmin}_f \sum_{x,y \in S_1} [D_{S_1}(x,y) - D_{S_2}(f(x), f(y))]^2 \quad (4.1)$$

Un'altra caratteristica che deve avere è di conservare la corretta triangolazione della forma, senza che vi siano capovolgimenti o sovrapposizioni di triangoli, esprimiamo quindi la posizione di ogni vertice con le coordinate baricentriche rispetto ai vertici adiacenti.

Nella fase di allineamento dobbiamo invece allineare gli embedding ottenuti in modo da avvicinare il più possibile i vertici corrispondenti delle due forme. Non siamo tuttavia a conoscenza a priori della corrispondenza tra i punti, per cui caratterizziamo i punti della superficie mediante un descrittore, cioè una funzione $f : S \rightarrow R$ che associa un valore ad ogni punto della superficie. L'obiettivo dell'allineamento è quindi quello di massimizzare la correlazione tra i due descrittori. Il descrittore che usiamo è quello del flusso geodesico, che è legata alla probabilità che una curva geodesica nella superficie passi per un determinato punto. L'allineamento viene eseguito mediante l'uso delle armoniche sferiche, esse permettono di esprimere la funzione descrittrice della superficie mediante un insieme di coefficienti di una base ortonormale. La caratteristica interessante delle armoniche sferiche è che sono indipendenti alla rotazione, il che velocizza la ricerca della rotazione che le allinea.



(I) La prima fase viene eseguita su ogni modello e comprende l'embedding sferico del modello (a) e la costruzione del suo descrittore di superficie (b).



(II) La seconda fase è quella di allineamento e ricerca di corrispondenze. L'input di questa fase sono due modelli da confrontare, il loro embedding sferico e il loro descrittore di superficie. Sulla base del descrittore vengono calcolate le armoniche sferiche e trovata la rotazione che allinea il secondo embedding con il primo. Infine vengono assegnate le corrispondenze.

Figura 4.1: Esempio della procedura seguita dal nostro metodo.

Capitolo 5

Embedding sferico di superficie

In questo capitolo parleremo della fase cruciale del metodo da noi proposto. L'embedding sferico di superficie consiste nell'assegnare ad ogni punto della superficie del modello un punto della superficie sferica. Esistono varie proposte in letteratura che riguardano questo problema, ma nessuna ha le caratteristiche che desideriamo per essere utilizzata nell'ambito del matching denso non-rigido.

In 5.1 viene affrontato il problema della parametrizzazione sferica in modo generico, vengono analizzate le proposte esistenti in letteratura e i loro difetti. Nelle sezioni successive sono esposte le caratteristiche del nostro metodo: le proprietà dell'embedding di superficie, il metodo di risoluzione e le difficoltà implementative. Alla fine del capitolo verranno messi insieme tutti i pezzi e sarà formulato l'algoritmo usato per il nostro embedding.

5.1 Parametrizzazione sferica

L'idea su cui si basa il nostro metodo è quella di ridurre il problema della ricerca di corrispondenze a un problema di allineamento di due sfere. Per questo motivo di fondamentale importanza è il modo in cui la superficie della forma viene mappata sulla superficie della sfera.

La possibilità di parametrizzare una superficie triangolata *genus-0* su una superficie triangolata di una sfera senza sovrapposizione di triangoli è un risultato noto dovuto al teorema di Steinitz [36] e diversi metodi sono stati proposti. Un approccio tradizionale è quello di parametrizzare la figura sul piano e poi portare la parametrizzazione trovata sulla sfera. Il vantaggio di questa tecnica è che il caso planare è ben noto ed esistono algoritmi efficienti per la sua risoluzione. Approcci di questo tipo prevedono di scegliere un triangolo della figura come confine della parametrizzazione planare e quindi applicare un algoritmo iterativo per il riposizionamento dei vertici come combinazione lineare degli adiacenti. Un altro sistema è quello di suddividere il modello iniziale in due sottoinsiemi, individuando un insieme di lati che formi due sottografi bilanciati. A questo punto i due sottoinsiemi vengono mappati su due dischi planari che vengono in seguito riportati sulla sfera, ricollocando i lati precedentemente tolti. Entrambi i metodi effettuano una parametrizzazione sferica corretta, la differenza è nella distribuzione dei punti mappati, che con il secondo metodo risulta più omogenea.

Un altro approccio è quello di impostare la parametrizzazione sferica come un problema di minimizzazione. In questo caso ciascun vertice è

espresso come combinazione lineare dei suoi vicini:

$$\alpha_i = \sum_{j \in N(i)} w_{ij} x_j \quad i = 1, \dots, n \quad (5.1)$$

$$\|x_i\|^2 = 1 \quad i = 1, \dots, n \quad (5.2)$$

dove $N(i)$ è l'insieme dei vertici adiacenti a i e α_i è una variabile ausiliaria che proietta ogni punto in $N(i)$ sul piano tangente ad i . La parametrizzazione sferica risultante dipende dal tipo di pesi w_{ij} che si usano.

Il problema dei metodi precedentemente descritti è che l'embedding sferico risultante dipende esclusivamente dalla triangolazione della forma, il che fa sì che non siano adatti per il nostro scopo, infatti il nostro obiettivo è ottenere un embedding $f : S_1 \rightarrow S_2$ che per ogni coppia di punti $x, y \in S_1$ minimizzi la differenza della distanza geodesica tra x, y e $f(x), f(y)$:

$$\underset{f}{\operatorname{argmin}} \sum_{x, y \in S_1} [D_{S_1}(x, y) - D_{S_2}(f(x), f(y))]^2 \quad (5.3)$$

Un tipo di parametrizzazione che dipende dalle proprietà geometriche della superficie è la parametrizzazione sferica conforme. Date due superfici regolari S_1 e S_2 , una funzione biettiva $f : S_1 \rightarrow S_2$ viene detta *conforme* se gli angoli tra le curve delle due superfici sono mantenuti. Secondo il teorema di Riemann (*Riemann Mapping Theorem*) una mappa conforme tra due superfici genus-0 esiste sempre e in particolare, essendo la sfera una superficie genus-0, esiste sempre una mappa tra una superficie genus-0 e una sfera. Esistono diversi approcci per ottenere una mappa conforme [18, 29, 17, 35]. Seppure la parametrizzazione conforme sia indipendente dalla triangolazione e preservi la proprietà geometrica

dell'angolo tra le curve tra forma sorgente e sfera, questa proprietà ha l'effetto di preservare le distanze geodesiche tra superficie e sfera solo localmente.

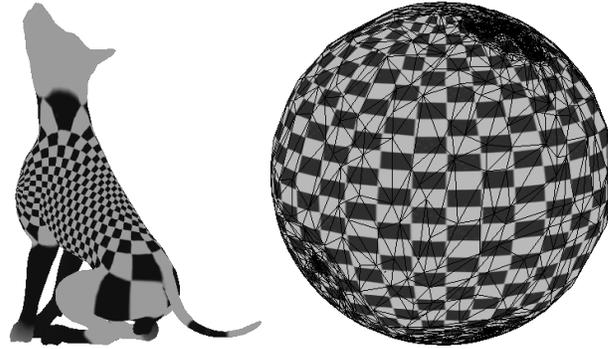


Figura 5.1: Parametrizzazione conforme del modello di un cane sulla sfera. Si può notare come la scacchiera mappata sul cane mantenga gli angoli tra i quadrati che la compongono.

Una parametrizzazione che mira a minimizzare la 7.3 è quella che si ottiene attraverso l'MDS (Multidimensional Scaling) [13, 7]. La formulazione dell'MDS ai minimi quadrati consiste nella ricerca della mappa $f : S_1 \rightarrow S_2$, con S_2 superficie della sfera di raggio unitario, tale che:

$$f = \underset{f}{\operatorname{argmin}} \sum_{x,y \in S_1} w_{xy} (D_{S_1}(x,y) - D_{S_2}(f(x), f(y)))^2 = \quad (5.4)$$

$$\underset{f}{\operatorname{argmin}} \sum_{x,y \in S_1} w_{xy} (D_{S_1}(x,y) - R \arccos(f(x) \cdot f(y)))^2 \quad (5.5)$$

dove R è il raggio della sfera che minimizza f e w_{xy} è un peso assegnato alla coppia di vertici x, y . La minimizzazione 5.5 può essere calcolata attraverso il metodo della discesa del gradiente descritto nella sezione 5.3. Seppure il MDS sia un algoritmo sviluppato appositamente per ottenere

una mappa che minimizza la distorsione delle distanze geodesiche tra la forma e la sua parametrizzazione sferica, esso non effettua un embedding di superficie, ma bensì di punti. Il MDS infatti non offre nessuna garanzia sulla corretta triangolazione dell'embedding finale.

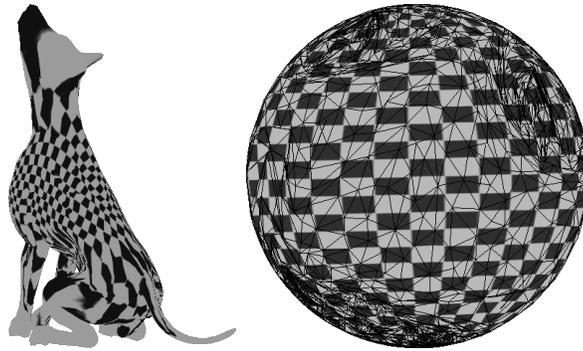


Figura 5.2: Parametrizzazione sferica del cane ottenuta con il nostro metodo. Si può notare come la struttura dei quadrati sia mantenuta, per di più la loro dimensione risulta essere più omogenea rispetto al conformal mapping..

La formulazione del nostro embedding sferico deriva dal MDS e punta a ottenere una mappa dalla superficie della forma alla superficie della sfera senza la sovrapposizione di triangoli. A tale scopo la 5.5 è stata modificata in modo da esprimere la posizione di ogni vertice $f(x) \in S_2$ come combinazione lineare dei vertici adiacenti $N(f(x))$:

$$f = \underset{f}{\operatorname{argmin}} \sum_{x,y} w_{ij} \left[D_{S_1}(x,y) - R \arccos \left(\sum_{z \in N(f(x))} \lambda_{f(x),z} z \cdot \sum_{z \in N(f(y))} \lambda_{f(y),z} z \right) \right]^2 \quad (5.6)$$

5.2 Minimizzazione distorsione globale

Lo scopo del nostro metodo è di minimizzare la distorsione delle distanze geodesiche tra tutte le coppie di punti mantenendo al contempo la triangolazione della superficie. L'idea generale del metodo è di far sì che nelle varie iterazioni ogni punto possa muoversi solo all'interno del poligono formato dal suo vicinato. Come abbiamo visto in 3.2 possiamo esprimere un punto all'interno di un poligono con vertici v_1, \dots, v_n come combinazione lineare di tali vertici mediante le coordinate baricentriche.

$$v = \sum_i \lambda_i v_i \quad (5.7)$$

Siano v_1, \dots, v_n gli n vertici che formano la superficie, sia $D_G(i, j)$ la distanza geodesica sul modello tra il vertice i -esimo e j -esimo e $N(i)$ l'insieme degli indici dei vertici adiacenti a v_i , riformuliamo quindi la tensione T dell'MDS come:

$$T = \sum_{i,j} f_i f_j \left[D_G(i, j) - R \arccos \left(\sum_{k \in N(i)} \lambda_{i,k} v_k \cdot \sum_{k \in N(j)} \lambda_{j,k} v_k \right) \right]^2 \quad (5.8)$$

dove i pesi assegnati ai vertici f_i e f_j sono la somma delle aree dei triangoli a cui appartengono. In questo modo si impedisce ad aree dense della superficie, per esempio le zone in cui vengono mappate gli arti, di rallentare la minimizzazione della tensione T.

Il raggio della sfera Il termine R in 5.8 è il raggio della sfera. Dobbiamo trovare il valore di R che minimizza 5.8. La derivata di T rispetto ad R è:

$$\frac{\partial T}{\partial R} = \sum_i \sum_j f_i f_j (d_{i,j} - R \arccos(x_i \cdot x_j)) (-\arccos(x_i \cdot x_j)) \quad (5.9)$$

Ponendo la derivata prima uguale a 0 si trovano i punti di minimo e di massimo. Banalmente si può vedere che $T \rightarrow \infty$ per $R \rightarrow \infty$ per cui il punto così trovato è il minimo.

$$R = \frac{\sum_i \sum_j f_i f_j d_{ij} \arccos(x_i \cdot x_j)}{\sum_i \sum_j f_i f_j d_{ij} \arccos^2(x_i \cdot x_j)} \quad (5.10)$$

A questo punto applichiamo il metodo della discesa del gradiente per trovare la configurazione di punti che minimizza T .

5.3 Discesa del gradiente

Ora che abbiamo impostato l'embedding sferico come un problema di ottimizzazione in cui bisogna minimizzare la funzione di stress ??, dobbiamo risolverlo in qualche modo. Una tecnica per la ricerca del minimo locale di una funzione è la discesa del gradiente.

Il gradiente di una funzione scalare $f(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n)$ è definito come il campo dei vettori i cui componenti sono le derivate parziali di f .

$$\nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n} \right) \quad (5.11)$$

Il metodo della discesa del gradiente si fonda sul fatto che se una funzione con più variabili $f(x_1, \dots, x_n) : \mathbb{R}^n \rightarrow R$ è definita e differenziabile nell'intorno di un punto p , allora è possibile definirne il gradiente $\nabla f(x_1, \dots, x_n)$ che indica verso quale direzione la funzione cresce. Seguendo la direzione $-\nabla f(x_1, \dots, x_n)$ è quindi possibile avvicinarsi ad un minimo locale di f . Per $\gamma > 0$ infinitesimale la sequenza $\vec{x}^0, \vec{x}^1 \dots$ definita

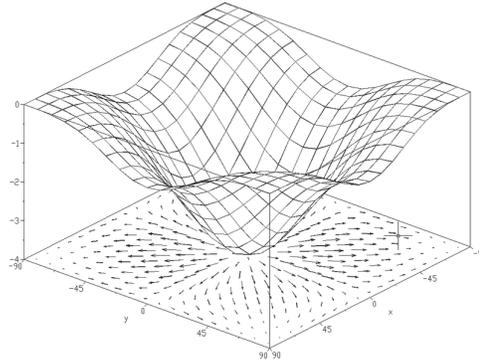


Figura 5.3: Il gradiente della funzione $f(x, y) = -(\cos^2(x)\cos^2(y))^2$

iterativamente come:

$$\vec{x}^{n+1} = \vec{x}^n - \gamma \nabla f(x^n) \quad (5.12)$$

tende al minimo locale più prossimo così che $f(\mathbf{x}_0) \geq f(\mathbf{x}_1) \geq f(\mathbf{x}_2) \geq \dots$. Uno dei problemi della discesa del gradiente è proprio la scelta di γ poiché per valori troppo piccoli la convergenza del metodo risulta essere troppo lenta e per valori troppo grandi si corre il rischio di saltare il minimo locale (Figura 5.4).

Il nostro obiettivo è trovare le coordinate baricentriche di ogni vertice che minimizzano la funzione che descrive la tensione:

$$\underset{\lambda_{i,j} \quad i,j=1\dots n}{\operatorname{argmin}} f(\lambda_{1,1}, \lambda_{1,2}, \dots, \lambda_{n,n-1}, \lambda_{n,n}) \quad (5.13)$$

con $\lambda_{ij} > 0$ solo se i vertici x_i e x_j sono adiacenti.

$$f(\lambda_{1,1}, \lambda_{1,2}, \dots, \lambda_{n,n-1}, \lambda_{n,n}) = \quad (5.14)$$

$$\sum_{i,j} f_i f_j \left[D_G(i, j) - R \arccos \left(\sum_{k \in N(i)} \lambda_{i,k} v_k \cdot \sum_{k \in N(j)} \lambda_{j,k} v_k \right) \right]^2 \quad (5.15)$$

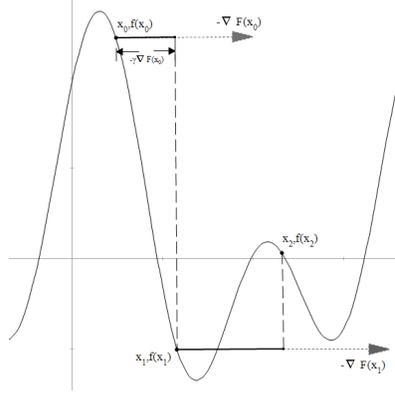


Figura 5.4: Esempio di salto del minimo locale con la discesa del gradiente

Il gradiente di f è:

$$\nabla F(\vec{\lambda}) = \left(\frac{\partial f}{\partial \lambda_{1,1}}, \dots, \frac{\partial f}{\partial \lambda_{n,n}} \right) \quad (5.16)$$

dove le singole derivate parziali sono:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial \lambda_{s,t}} \sum_{i,j} f_i f_j \left[D_G(i,j) - R \arccos \left(\sum_{k \in N(i)} \lambda_{i,k} v_k \cdot \sum_{k \in N(j)} \lambda_{j,k} v_k \right) \right]^2 = \\ 2 \sum_{i,j} f_i f_j \left[D_G(i,j) - R \arccos \left(\sum_{k \in N(i)} \lambda_{i,k} v_k \cdot \sum_{k \in N(j)} \lambda_{j,k} v_k \right) \right] \times \\ \times \sum_{i,j} \frac{\partial f}{\partial \lambda_{s,t}} \left[D_G(i,j) - R \arccos \left(\sum_{k \in N(i)} \lambda_{i,k} v_k \cdot \sum_{k \in N(j)} \lambda_{j,k} v_k \right) \right] \end{aligned} \quad (5.17)$$

$$\frac{\partial f}{\partial \lambda_{s,t}} \left[D_G(i,j) - R \arccos \left(\sum_{k \in N(i)} \lambda_{i,k} v_k \cdot \sum_{k \in N(j)} \lambda_{j,k} v_k \right) \right] = R \frac{v_i \cdot v_j}{\sqrt{1 - (v_i \cdot v_j)^2}} \quad (5.18)$$

Bisogna tenere in considerazione che la derivata $\frac{\partial f}{\partial \lambda_{s,t}}$ è non nulla solo se $t \in N(s)$ poiché in caso contrario si ha che $\forall s \quad \lambda_{s,t} \notin \{\lambda_{s,k} \mid k \in N(s)\}$ e la seconda parte della derivata è sempre nulla.

5.4 Initial Guess

Prima di iniziare l'ottimizzazione basata sulla discesa del gradiente è necessario avere una valida parametrizzazione del modello sulla sfera in modo da non avere triangoli degeneri o sovrapposizioni. Un modo per collocare ogni vertice della forma sulla sfera, come mostrato da Gotsman [17], è quello di usare una parametrizzazione baricentrica sferica dei vertici $x_i \in \mathbb{R}^3$ e quindi di risolvere il sistema di equazioni in quattro variabili:

$$\alpha_i x_i = \sum_{j \in N(i)} w_{ij} x_j \quad i = 1, \dots, n \quad (5.19)$$

$$\|x_i\|^2 = 1 \quad i = 1, \dots, n \quad (5.20)$$

dove $N(i)$ è l'insieme dei vertici adiacenti a i e α_i è una variabile ausiliaria che proietta ogni punto in $N(i)$ sul piano tangente ad i . Possiamo risolvere 5.19 e 5.20 con il metodo iterativo di Gauss-Seidel:

$$\forall i = 1, \dots, n \quad x_i^{k+1} = \alpha_i^k * [(1 - \lambda)x_i^k + \lambda \sum_{j \in N(i)} w_{i,j} x_j^k] \quad t.c. \|x_i^{k+1}\| = 1 \quad (5.21)$$

con $0 < \lambda \leq 1$. In [23] Saba mostra che in alcuni casi il metodo di Gauss-Seidel inizia a divergere quando ci si avvicina alla soluzione biettiva è propone un altro metodo per la risoluzione di 5.19 e 5.20. Poiché come initial guess non miriamo ad ottenere una parametrizzazione biettiva ma una sua approssimazione possiamo ignorare tale problema è fermarci nel

momento in cui l'errore $e^k = \|\bar{x}^k - \bar{x}^{k+1}\|$ è minore di una certa soglia oppure inizia a crescere. Per applicare Gauss-Seidel abbiamo bisogno comunque di un'appropriata inizializzazione dei punti per non incorrere nella soluzione primitiva in cui tutti i vertici sono nello stesso punto della superficie sferica. La soluzione più semplice è quella di posizionarsi in un punto p_0 interno al modello e proiettare tutti i punti sulla sfera unitaria centrata in p_0 . La configurazione di punti risultante non è però sempre appropriata e dipende fortemente dal punto scelto. Usiamo invece il metodo descritto in [23] che è una variante dell'algoritmo proposto da Iseburg in [33]. Esso prevede di ridurre il problema dell'embedding sferico a due casi planari; si divide il modello in due insiemi di vertici bilanciati i cui confini sono adiacenti, si procede a mappare tali vertici in un disco planare usando la procedura di Tutte [38] e infine si riassemblano i due dischi lungo il bordo comune. In questo modo otteniamo già un embedding sferico valido, tuttavia la corrispondente disposizione dei punti non è ideale per il nostro metodo. La discesa del gradiente è infatti un metodo di ottimizzazione che trova un minimo locale, per questo motivo assume molta importanza il punto della funzione da cui si parte, cioè la disposizione iniziale dei punti. Dai test effettuati è risultato che si riesce ad ottenere un risultato migliore quando i vertici iniziali sono il più distanziati possibile.

Dopo aver portato la triangolazione sulla sfera eseguiamo quindi l'algoritmo di Gauss-Seidel usando come pesi di ciascun vertice la somma dell'area dei triangoli a cui appartiene:

$$w_{ij} = \sum_{t \in T(j)} A(t) \tag{5.22}$$

dove $T(j)$ è l'insieme dei triangoli che hanno j come vertice e $A(t)$ è l'area

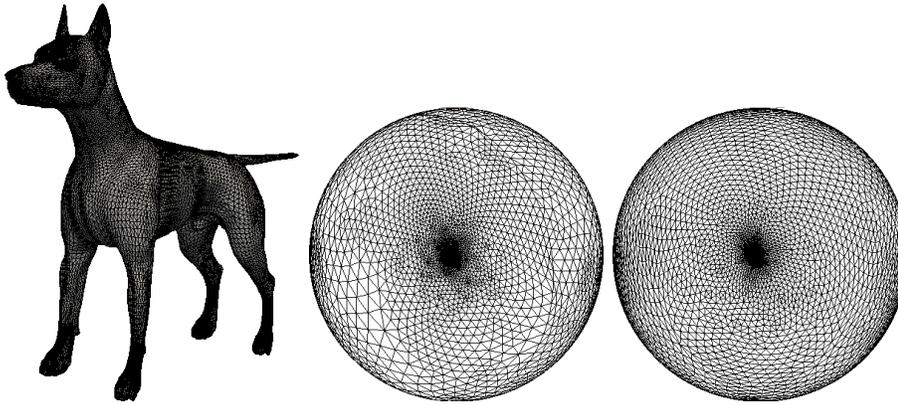


Figura 5.5: Initial guess del cane con Tutte (sinistra) e 5.22 (destra)

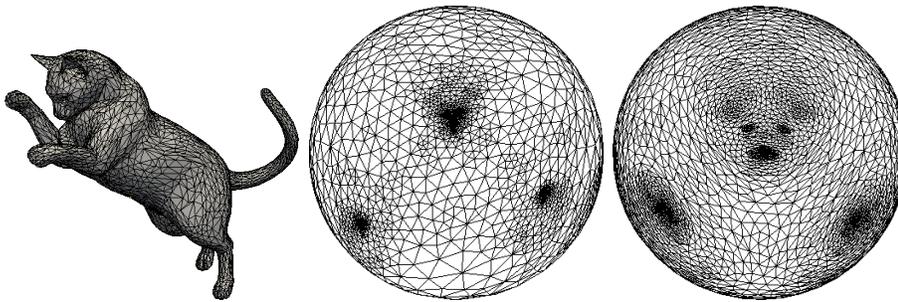


Figura 5.6: Initial guess del gatto con Tutte (sinistra) e 5.22 (destra)

del triangolo t .

Triangoli degeneri Seppure l'uso delle coordinate baricentriche limiti lo spostamento del punto all'area inscritta nel poligono formato dai vertici adiacenti, è comunque possibile che si formino triangoli degeneri. Inoltre la modifica dei pesi a seguito della discesa del gradiente non garantisce che le coordinate baricentriche risultanti mantengano il punto all'interno del poligono in caso di poligoni convessi. Per questi motivi la presenza di flip è evitata proceduralmente controllandone la presenza al termine

di ogni iterazione e ripetendola inibendo il movimento di tali vertici nel caso ci siano triangoli capovolti o degeneri.

5.5 La procedura

Per ottenere l'embedding sferico che utilizzeremo nella correlazione sferica spiegata in precedenza dobbiamo quindi eseguire una serie di passaggi. Quindi, data una forma genus-0, cioè senza punti di discontinuità sulla superficie, e non Manifold, cioè con non più di due triangoli che condividono un lato, otteniamo un valido embedding sferico per il matching denso eseguendo i seguenti passi:

1. Dal modello otteniamo il primo embedding sferico con l'algoritmo di Saba [23];
2. Utilizziamo l'algoritmo di Gauss-Seidel per spaziare i punti e ottenere il nostro *initial guess*;
3. Applichiamo la **discesa del gradiente**;

L'algoritmo di **discesa del gradiente** viene eseguito sulla superficie triangolata dell'*initial guess*, dove $x_i^0, i = 1, \dots, n$ ne sono i vertici e w_{ij}^0 le coordinate baricentriche di i rispetto a j . Il passo con cui vengono aggiornati i pesi è $\lambda > 0$, inoltre viene assegnato anche un passo λ_i ad ogni singolo vertice v_i . Questo permette di inibire il movimento di quei vertici che causano la sovrapposizioni dei triangoli. Nei nostri test a λ è stato assegnato un valore iniziale di 0.1 e a λ_i 1; durante l'esecuzione il loro valore viene modificato opportunamente per permettere un'a convergenza più veloce.

1. Calcola le coordinate baricentriche sferiche w_{ij} di ogni vertice $v_i, i = 1, \dots, n$.
2. Calcola il gradiente della funzione $\nabla F = f(\{w_{ij} \mid i = 1, \dots, n, j \in N(i)\})$.
3. Aggiorna i pesi baricentrici di ogni vertice v_i in modo che $\epsilon \leq w_{ij}$:

$$\forall j \in N(i) w_{i,j} * k + 1 = \max(\epsilon, w_{i,j}^k - \lambda_j \lambda \nabla F(w_{i,j}^k))$$

La costante $0 < \epsilon < 1$ deve essere sufficientemente piccola e serve per impedire la formazione di triangoli degeneri, mentre λ è il passo della discesa del gradiente.

4. Ricalcola la posizione sulla superficie della sfera dei vertici v_i in base alle nuove coordinate baricentriche:

$$x_i^{k+1} = \sum_{j \in N(i)} w_{ij}^{k+1} x_j^k$$

$$x_i^{k+1} = \frac{x_i^{k+1}}{\|x_i^{k+1}\|}$$

5. Controlla l'eventuale capovolgimento dei triangoli e rallenta il movimento dei vertici appartenenti ai triangoli che hanno subito un capovolgimento:

$$\forall t \in FlippedTriangles \quad \forall i \text{ t.c. } v_i \in t \quad \lambda_j = \frac{\lambda_j}{2}$$

Se $FlippedTriangles \neq \emptyset$ riesegui l'aggiornamento dei pesi e dei vertici dal punto 3

6. Calcola lo scostamento della tensione geodesica dal passo precedente:

$$T^{k+1} = \sum_{ij} f_i f_j [D_G(i, j) - d_g^{k+1}(i, j)]^2$$
$$\Delta T = T^k - T^{k+1}$$

dove $d_g^{k+1}(i, j)$ indica la distanza geodesica sulla superficie della sfera tra il vertice i -esimo e il j -esimo. Se $\Delta T > 0$ significa che la tensione è cresciuta per cui diminuiamo il valore di λ , $\lambda = \lambda/2$, e ripetiamo dalla 3.

7. Controlliamo se $|\Delta T| < \delta$, cioè se lo scostamento dall'iterazione precedente è inferiore ad una certa soglia stabilita; in questo caso abbiamo concluso la discesa del gradiente, altrimenti aggiorniamo i valori dei λ , $\lambda = 1.1\lambda$, $\lambda_i = 1, i = 1, \dots, n$ e ripartiamo dalla 1.

Capitolo 6

Allineamento sferico

Dopo aver visto, nel capitolo precedente, come produrre un *embedding* sferico di superficie che ci permette di tradurre al meglio le deformazioni isometriche in rotazioni della sfera, è necessario ora trovare la rotazione che allinea gli embedding di due forme isometriche. In questo capitolo è esposto il metodo che è stato utilizzato per individuare la rotazione che allinea al meglio due embedding sferici. L'allineamento, come la parametrizzazione sferica, deve essere il più indipendente possibile dal campionamento della forma. A tale scopo esso non può basarsi sulla triangolazione e sulla posizione dei vertici dell'embedding, ma bensì sulle caratteristiche geometriche della superficie. Un modo per descrivere una superficie è quello di associare un valore ad ogni suo punto in modo che il valore risultante sia invariante alle trasformazioni isometriche. Un descrittore con tale caratteristica è la mappa del flusso geodesico che è legato alla probabilità che una curva geodesica passi per un determinato punto. Una volta individuato il descrittore adatto, è necessario calcolarli per ciascuna delle due forme e trovare la rotazione $R \in SO(3)$ che li sovrappone

al meglio. Questa fase viene effettuata mediante la correlazione sferica e l'uso delle armoniche sferiche, che permettono di trovare velocemente la rotazione ed inoltre eliminano il rumore dovuto alla discretizzazione della superficie.

6.1 Mappa della superficie

Al fine di allineare le due superfici sferiche è necessario possedere una funzione che associ ad ogni punto della superficie una certa misura. Una caratteristica che deve avere questa funzione è di essere invariante alle deformazioni isometriche, cioè la stessa funzione applicata a due modelli isometrici deve restituire la stessa mappa di superficie. Poiché abbiamo a che fare con trasformazioni quasi isometriche, è anche opportuno che tale funzione risulti robusta a piccole deformazioni non isometriche.

6.1.1 Densità geodesica

Un tipo di mappa che abbiamo usato nei vari esperimenti è la mappa della densità geodesica, costruita assegnando ad ogni vertice della superficie un valore pari al numero di geodesiche passanti nei pressi di tale vertice. Così facendo un punto della superficie avrà un valore più alto quanto più il flusso geodesico passa per quel punto. Possiamo immaginare il modello come un terreno e il flusso geodesico come il flusso d'acqua che un eventuale pioggia porterebbe, per cui ci aspettiamo di avere un valore basso in corrispondenza di picchi e un valore alto laddove il modello ha degli incanalamenti.

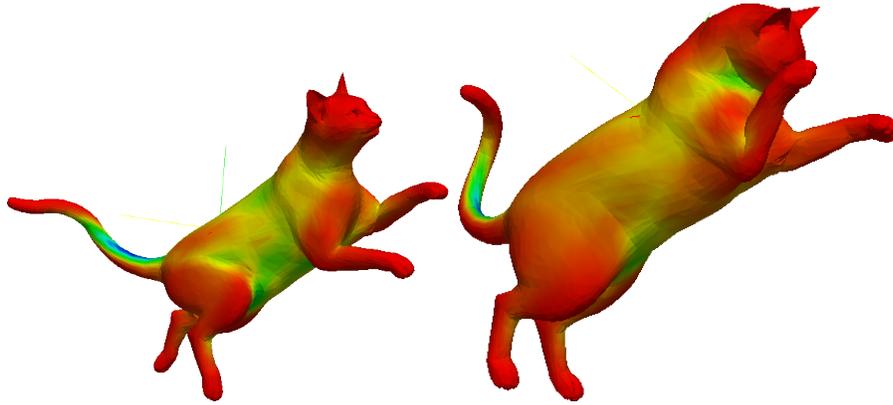


Figura 6.1: Percorso geodesico tra due punti

Formalmente possiamo definire la densità geodesica di ogni punto della superficie, $GD(x)$, $x \in S$ come:

$$GD(x) = \int_S \int_S 1_{\gamma_{\alpha,\beta}}(x) d\alpha, d\beta \quad (6.1)$$

dove $1_{\gamma_{\alpha,\beta}}(x)$ è una funzione che vale 1 se la curva geodesica tra α e β passa per x , 0 altrimenti.

Il valore del flusso è approssimato proceduralmente calcolando la linea geodesica che collega ogni coppia di vertici e sommando un peso ad ogni vertice del modello in base alla distanza da essa. La linea geodesica tra due punti in una superficie può essere definita come la linea dritta che collega i due punti nello spazio curvo. Per calcolare il percorso geodesico tra due punti nella superficie triangolata S usiamo un'implementazione in c++ dell'algoritmo proposto da Danil Kirsanov in [37] che permette di calcolare il percorso geodesico esatto in $O(n^2 \log n)$. L'algoritmo consiste in una modifica dell'algoritmo di Dijkstra per trovare il percorso minimo in un grafo, tuttavia, come si può vedere in Figura 6.2, tale percorso non è semplicemente un percorso minimo nel grafo formato alla triangolazione

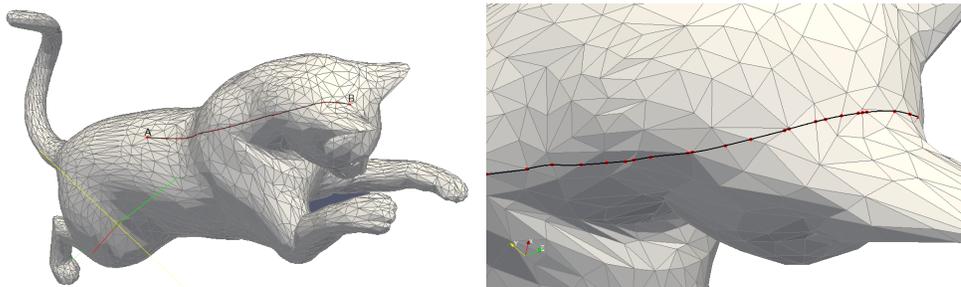


Figura 6.2: Mappa della densità geodesica su due modelli isometrici di gatto

della superficie. Il risultato è una lista di punti $Gp(v_1, v_2) = p_1, \dots, p_n$ in cui la linea geodesica tra v_1 e v_2 interseca i vari lati dei triangoli attraversati. Per ciascun punto di intersezione viene sommato a ciascun vertice un peso in maniera proporzionale alla distanza seguendo una curva gaussiana.

$$\forall v \in S \quad f(v) = \sum_{v_1, v_2 \in S} \sum_{p \in Gp(v_1, v_2)} \frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(D_g(v, p))^2}{2\sigma^2}} \quad (6.2)$$

dove $D_g(v, p)$ è la distanza geodesica tra v e p .

La formula 6.2 funziona in caso di una superficie triangolata uniformemente. Può essere quindi opportuno normalizzare il valore assegnato a ciascuna geodesica in proporzione all'area formata dal vicinato dei due vertici di partenza e arrivo, in modo che zone a più alta triangolazione non influiscano più di zone a bassa triangolazione.

$$\forall v \in S \quad f(v) = \sum_{v_1, v_2 \in S} A_{v_1} A_{v_2} \sum_{p \in Gp(v_1, v_2)} \frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(D_g(v, p))^2}{2\sigma^2}} \quad (6.3)$$

dove A_{v_1} e A_{v_2} sono rispettivamente la somma delle aree dei triangoli a cui appartengono v_1 e v_2 .

Purtroppo, come vedremo negli esperimenti alla fine del documento, la densità geodesica così calcolata non si è dimostrata molto robusta a deformazioni non isometriche.

6.1.2 Densità geodesica locale

Il descrittore ottenuto con la densità geodesica globale della superficie, come vedremo nei successivi esperimenti, non è un descrittore molto robusto poiché piccoli cambiamenti non isometrici della superficie possono far aumentare la densità geodesica di molto in particolari zone, facendo perdere le informazioni sulla struttura delle aree meno dense.

Per rimediare a questo problema abbiamo reso la densità geodesica locale limitando, per ogni vertice v_i , il calcolo del flusso geodesico solo ad un sottoinsieme dei punti della superficie la cui distanza geodesica da v_i è inferiore ad un certo raggio $r_g \in \mathbb{R}^+$. Il comportamento che abbiamo osservato al variare di r_g è che per r_g bassi si perde precisione generale nell'allineamento degli embedding sferici, tuttavia è possibile riconoscere e allineare embedding che, a causa delle enormi variazioni del flusso globale, risultavano troppo differenti.

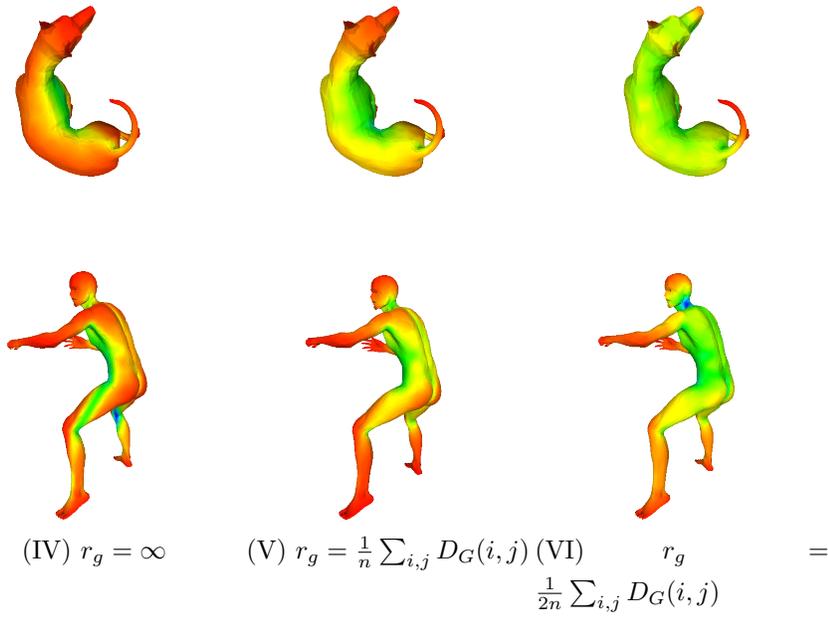


Figura 6.3: Variazione della mappa geodesica alla variazione di r_g

6.2 Correlazione Sferica

La fase finale del nostro metodo consiste nel trovare le corrispondenze tra le superfici di due modelli che differiscono per una trasformazione isometrica (o quasi) per ciascuno dei quali abbiamo già effettuato le due fasi precedenti. Abbiamo quindi ridotto le trasformazioni isometriche per cui differivano i due modelli in rotazioni sulla sfera di raggio unitario. Il problema è ora trovare la rotazione $R \in SO(3)$, parametrizzata sugli angoli euclidei α, β, γ , che meglio sovrappone i loro descrittori di superficie.

$$\underset{R}{\operatorname{argmin}} \sum_{\theta, \gamma} [f_1(\theta, \gamma) - f_2((\theta, \gamma) * R)]^2 \quad (6.4)$$

Una ricerca esaustiva dell'allineamento ideale è computazionalmente molto pesante poiché sarebbe necessario verificare l'errore per ogni possibile combinazione di α, β, γ . Esiste tuttavia un modo molto efficiente per allineare due sfere che fa uso delle armoniche sferiche e della loro indipendenza dalle rotazioni [19]. Inoltre le armoniche sferiche consentono di filtrare il 'rumore' del descrittore della superficie che potrebbe eventualmente essersi creato a causa della sua discretizzazione. Se da un lato le armoniche sferiche permettono di ricavare molto velocemente un allineamento delle due sfere, dall'altro comportano una perdita di informazione del descrittore originale, perciò la precisione dell'allineamento dipende dalla massima banda con cui sono state calcolate. Per questo motivo, dopo aver ottenuto un primo allineamento mediante l'utilizzo delle armoniche sferiche, può essere utile ricercarne uno migliore esaustivamente nel suo intorno.

6.2.1 Le armoniche sferiche

Le armoniche sferiche sono un insieme di soluzioni alle equazioni di Laplace espresse in coordinate sferiche:

$$\Delta f = \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho^2 \frac{\partial f}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\rho^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial f}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\rho^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 f}{\partial \varphi^2} = 0 \quad (6.5)$$

Per grado $m, l \in \mathbb{Z}$, $|m| < l$ sono espresse come:

$$Y_l^m(\theta, \phi) = \sqrt{\frac{(2l+1)(l-m)!}{4(l+m)!}} P_l^m(\cos \theta) e^{im\phi} \quad (6.6)$$

dove $P_l^m(x)$ è il corrispondente polinomio di Legendre. Le armoniche sferiche formano una base ortonormale per le funzioni $f \in L_2(\mathbb{S})$. La proiezione di f su tali basi produce i coefficienti:

$$\hat{f}(l, m) = \langle f, Y_l^m \rangle \quad (6.7)$$

dove $\langle f, Y_l^m \rangle$ è prodotto scalare.

Rotazione delle armoniche sferiche Una proprietà interessante delle armoniche sferiche è che sono indipendenti dalle rotazioni, ovvero date due funzioni armoniche sferiche f e g che differiscono solo per una rotazione R sulla sfera unitaria allora

$$g(s) = f(R(s)) \quad (6.8)$$

Come riportato in [19] dato un elemento nel gruppo di rotazione $R \in SO(3)$ con angoli di Eulero α, β, γ , la rotazione dell'armonica sferica è espressa come:

$$Y_m^l(w) = \sum_{n=-l}^l Y_l^n(R^{-1}w) D_{m,n}^l(R) \quad (6.9)$$

dove $D_{m,n}$ sono elementi della *D-Matrix di Wigner* definiti

$$D_{m,n}^l(R) = e^{-i(m\alpha+n\gamma)} d_{m,n}^l(\beta) \quad (6.10)$$

$d_{m,n}^l$ è la rappresentazione irriducibile di $SO(3)$

$$d_{m,n}^l(\beta) = \sum_t (-1)^t \times \frac{\sqrt{(l+n)!(l-n)!(l+m)!(l-m)!}}{(l+n-t)!(l-m-t)!(t+m-n)!t!} \quad (6.11)$$

$$\times (\cos(\beta/2))^{2l+n-m-2t} \sin(\beta/2)^{2t+m-n}$$

con $\max(0, n-m) \leq k \leq \min(l-m, l+n)$ poiché il fattoriale di numeri negativi non è definito. Una formulazione di $d_{m,n}^l$ più adatta al calcolo numerico è proposta in [31]:

$$d_{m,n}^l(\beta) = c_{l,m,n} (-1)^{m-n} \sum_x (-1)^k \binom{l+n}{k} \binom{l-n}{l-m-k} \quad (6.12)$$

$$\times [\cos(\frac{1}{2}\beta)]^{2l-m+n-2k} [\sin(\frac{1}{2}\beta)]^{m-n+2k} \quad (6.13)$$

$$c_{l,m,n} = c_{l,|m|,|n|} = \left[\frac{(l+m)!(l-m)!}{(l+n)!(l-n)!} \right]^{1/2} \quad (6.14)$$

$$= \left[\binom{l}{|n|} \binom{l}{|m|}^{-1} \binom{l+|n|}{|n|}^{-1} \binom{l+|m|}{|m|} \right]^{1/2} \quad (6.15)$$

Considerata la proprietà 6.8 e la rotazione delle armoniche abbiamo che:

$$f(w) = g(R^{-1}(w)) \Rightarrow \hat{f}(l, m) = \sum_{n=-l}^l \hat{g}(l, n) D_{m,n}^l(R) \quad (6.16)$$

Correlazione mutua sferica La correlazione mutua (o **cross-correlation**) è un metodo usato nella teoria dei segnali per determinare la somiglianza tra due segnali traslati nel tempo.

$$R_{f,g}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t + \tau) \overline{g(\tau)} d\tau \quad (6.17)$$

dove $\overline{g(t)}$ è la coniugata trasposta complessa di $g(t)$. Nel caso della correlazione mutua sferica il dominio delle funzioni è $f, g \in L_2(\mathbb{S}^2)$ e la traslazione nel tempo è sostituita dalla rotazione nella sfera:

$$C_{f,g}(R) = \int_{\mathbb{S}^2} f(w) \overline{g(R^{-1}(w))} dw \quad (6.18)$$

Una proprietà importante delle funzioni ortonormali è che l'integrale del prodotto di due funzioni \hat{f} e \hat{g} , derivate dall'espansione con una certa banda limitata B di f e g , è esprimibile come la somma del *dot-product* dei rispettivi coefficienti di proiezione (f_i, g_i) :

$$\int \hat{f}(x) \hat{g}(x) dx = \sum_{i=0}^B f_i g_i \quad (6.19)$$

Dalla 6.18 e dalla 6.19 abbiamo che date due funzioni armoniche sferiche con banda limitata B la loro correlazione sferica mutua è:

$$C_{f,g}(R) = \sum_{l=0}^{B-1} \sum_{m=-1}^l \sum_n \hat{f}(l, m) \overline{\hat{g}(l, n)} D_{m,n}^l(R) \quad (6.20)$$

In [19] viene proposto un metodo per la computazione della correlazione 6.20 tramite l'uso del FFT che comporta un notevole miglioramento in termini di velocità.

Possiamo quindi utilizzare le armoniche sferiche per stimare in modo veloce la rotazione che allinea le due sfere. L'utilizzo delle armoniche

sferiche per tale scopo comporta anche il vantaggio di poter scegliere la banda più appropriata in modo da eliminare il rumore provocato dalle alte frequenze. Come abbiamo visto in precedenza sia $w \in \mathbb{S}^2$, f una funzione sferica e \hat{f} la sua espansione:

$$\hat{f}(w) = \sum_{l=0}^{B-1} \sum_{m=-1}^l f_m^l(w) Y_m^l(w) \quad (6.21)$$

e se $B \rightarrow \infty$ abbiamo che per ogni $w_i, i = 1 \dots n$:

$$f(w_i) = \hat{f}(w_i) \quad (6.22)$$

che espresso in forma matriciale diventa

$$Ax = b \quad (6.23)$$

$$A = \begin{bmatrix} Y_0^0(w_1) & Y_1^{-1}(w_1) & Y_1^0(w_1) & Y_1^1(w_1) & \cdots & Y_B^B(w_1) \\ Y_0^0(w_2) & Y_1^{-1}(w_2) & Y_1^0(w_2) & Y_1^1(w_2) & \cdots & Y_B^B(w_2) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ Y_0^0(w_n) & Y_1^{-1}(w_n) & Y_1^0(w_n) & Y_1^1(w_n) & \cdots & Y_B^B(w_n) \end{bmatrix} \quad (6.24)$$

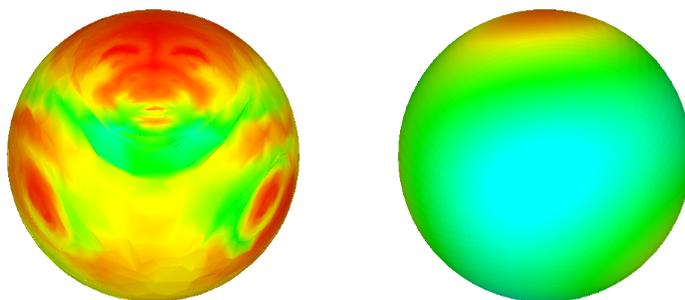
$$x^T = [f_0^0(w_1) \quad f_1^{-1}(w_1) \quad f_1^0(w_1) \quad f_1^1(w_1) \quad \cdots \quad f_B^B(w_1)] \quad (6.25)$$

$$b = [f(w_1) \quad f(w_2) \quad f(w_3) \quad f(w_4) \quad \cdots \quad f(w_n)] \quad (6.26)$$

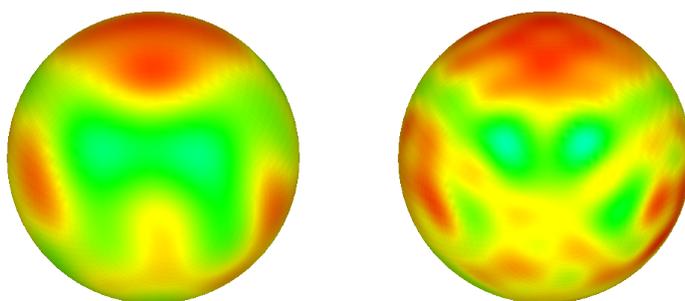
Tuttavia fissato B finito generalmente si ha $f(w) \neq \hat{f}(w)$ e siamo interessati a trovare

$$\underset{f_m^l(w)}{\operatorname{argmin}} \sum_w \left[\sum_{l,m} f_m^l(w) Y_m^l(w) - f(w) \right]^2 \quad (6.27)$$

il che comporta risolvere ai minimi quadrati il sistema $Ax = b$.



(I) Descrittore del flusso geodesico (II) Armoniche sferiche. $B=4$



(III) Armoniche sferiche. $B=12$ (IV) Armoniche sferiche. $B=20$

Figura 6.4: Rappresentazione del descrittore di superficie geodesico del gatto con armoniche sferiche limitate a diverse bande.

Capitolo 7

Esperimenti

In questo capitolo vedremo come si comporta il metodo descritto. Per effettuare gli esperimenti abbiamo usato il dataset SHREC 2010 [6]. Esso è composto da tre modelli (uomo, cane e cavallo) con diversi tipi e gradi di trasformazione. Noi tratteremo solo le categorie delle trasformazioni isometriche, di scala e di campionamento. Analizzeremo l'errore prodotto dal metodo al variare di alcuni parametri.

7.1 Metodo di valutazione

Il risultato del metodo descritto in questa tesi, dati due modelli *Genus-0* e *Manifold* in ingresso con insieme di vertici rispettivamente X e Y , produce un insieme di corrispondenze $C(X, Y) = (x_k, y_k), k = 1 \dots |Y|$. L'errore di queste corrispondenze viene misurato come la distanza geodesica media di ciascuna corrispondenza da quella esatta $C_0(X, Y) = (x'_k, y_k)$ e confrontato con altri metodi. Vengono inoltre proposti dei grafici per analizzare la bontà dello stimatore dell'errore descritto in [26].

$$E(C, C_0) = \sum_{k=1}^n d_X(x_k, x'_k) \quad (7.1)$$

7.2 Organizzazione degli esperimenti e Dataset

Gli esperimenti proposti sono eseguiti sul dataset SHREC 2010 [6] modificato per ridurre il numero di poligoni di ogni modello e rendere la fase di sperimentazione più rapida. Il dataset originale è composto da modelli di 10-50 mila vertici. Abbiamo usato una variante dell'algoritmo di eliminazione dei lati descritto in [15] che mantiene la topologia della mesh. La semplificazione può essere considerato come parte della nostra pipeline, ciò non fa quindi perdere di generalità il nostro metodo.

Nella prima parte ci concentriamo sulla classe delle trasformazioni isometriche. Per ciascuno dei tre modelli (uomo, cane e cavallo) è presente una trasformazione nulla e cinque trasformazioni isometriche. Nell'ultima parte sperimentiamo l'efficacia del metodo al variare della scala della forma e del suo campionamento. Per ogni modello e tipo di trasformazione abbiamo sei forme triangolate con insiemi di vertici $X, Y_i, i = [1 \dots 5]$, dove X rappresenta la trasformazione nulla. Abbiamo inoltre a disposizione la corrispondenza esatta dei vertici di ciascuna trasformazione rispetto al modello nullo. Troviamo quindi le corrispondenze $C_{r_g}(X, Y_i)$ e ne calcoliamo la distanza geodesica media dalla corrispondenza esatta $C_0(X, Y_i)$, dove r_g indica il raggio geodesico usato nel calcolare il descrittore della superficie basato sul flusso geodesico.

La procedura per ciascun esperimento prevede due fasi, la prima (Figura 7.1) consiste nelle operazioni da effettuare su ogni modello individualmente:

1. embedding sferico iniziale (initial-guess);
2. embedding geodesico;
3. descrittore di superficie basato sul flusso geodesico .

La seconda fase (Figura 7.2) è quella di ricerca delle corrispondenze che consiste nei seguenti passi:

1. allineamento degli embedding sferici mediante l'uso delle armoniche sferiche calcolate sul descrittore;
2. raffinamento dell'allineamento nell'intorno della rotazione trovata precedentemente, minimizzando la differenza del descrittore geodesico per ogni singolo punto;
3. assegnamento delle corrispondenze per ogni vertice;
4. stima della qualità delle corrispondenze.

Le corrispondenze trovate sono state quindi utilizzate per l'analisi del metodo proposto in questa tesi. Il primo gruppo di esperimenti è indirizzato alla valutazione dei descrittori del flusso geodesico; abbiamo utilizzato diversi valori del raggio per il calcolo del descrittore del flusso geodesico e ne abbiamo misurato l'errore di matching. Successivamente viene analizzata la distribuzione dell'errore sulla superficie della forma. Poter stimare l'errore di matching senza la conoscenza delle corrispondenze esatte è una cosa molto importante in quanto rende possibile una

raffinazione dell'embedding nelle zone con maggior errore. Una parte degli esperimenti è quindi dedicata alla valutazione della qualità della stima dell'errore. Dopo aver calcolato l'errore complessivo di matching del nostro metodo nelle classe delle trasformazioni isometriche è utile analizzare l'errore introdotto dalle varie fasi del matching. A questo scopo misuriamo l'errore del solo embedding, trovando l'allineamento ottimale degli embedding sferici che minimizza la distanza tra le corrispondenze esatte. Gli ultimi due esperimenti hanno lo scopo di mostrare il comportamento con altri due tipi di trasformazioni: il cambiamento della scala e la differenza di campionamento delle forme.

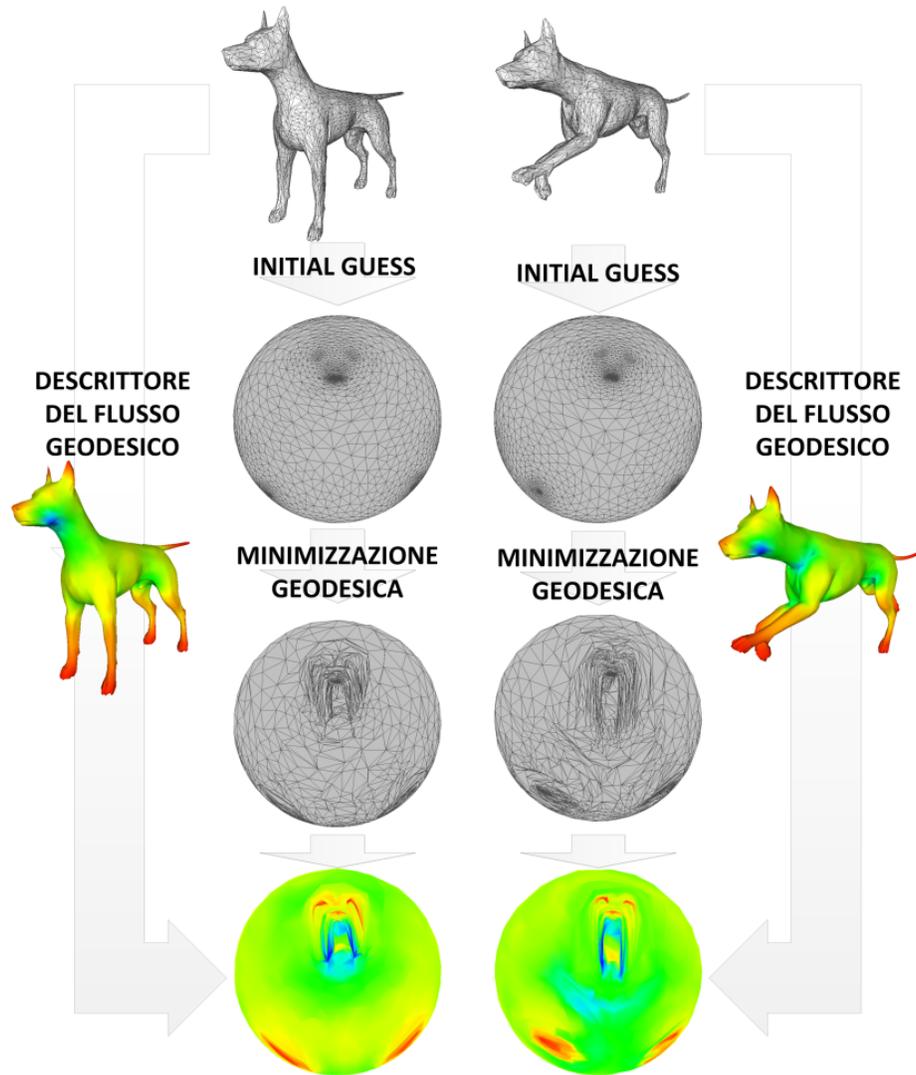


Figura 7.1: Esecuzione della prima fase del metodo sul modello nullo del cane e una sua trasformazione isometrica

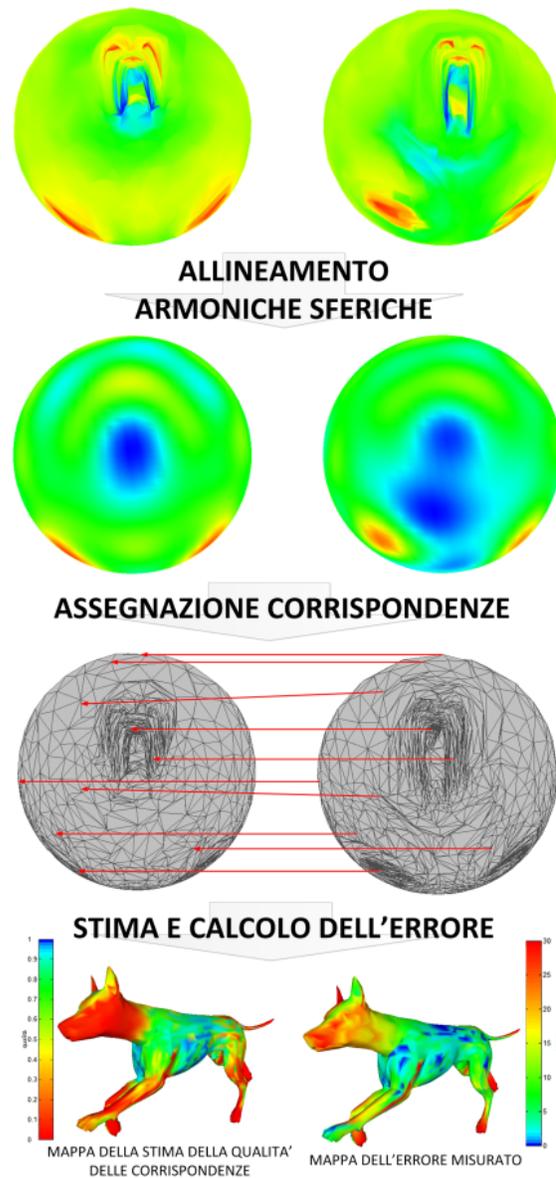


Figura 7.2: Esecuzione della seconda fase del metodo sul modello nullo del cane e una sua trasformazione isometrica

7.3 Valutazione esperimenti

In questa sezione vengono esposti i risultati degli esperimenti effettuati. Il pattern che identifica ciascun modello e le sue trasformazioni isometriche è: *numero-modello.isometry.numero-trasformazione*. I numeri dei modelli sono *0001*, *0002*, *0003* che identificano rispettivamente uomo, cane e cavallo; i numeri delle trasformazioni vanno da 1 a 5. Il modello dell'uomo è stato ridotto a 5002 vertici, mentre cane e cavallo ne hanno 3002. Per quanto riguarda le trasformazioni di scala e campionamento il pattern è rispettivamente *numero-modello.scale.numero-trasformazione* e *numero-modello.sampling.numero-trasformazione*. I relativi esperimenti sono stati effettuati solo nel modello 0002 ridotto nel primo caso a 3002 vertici e nel secondo caso in base al livello di campionamento.

Nella sezione 7.3.1 analizziamo il comportamento, per ciascun modello e deformazione isometrica, del metodo al variare del raggio con cui è stata calcolato il descrittore geodesico. Ciò ci permette di capire le motivazioni che portano ai risultati che vedremo e di scegliere il descrittore più appropriato per effettuare i restanti esperimenti. Successivamente in 7.3.2 vediamo come l'errore si distribuisce nei vertici e le zone con maggior errore. In 7.3.3 confrontiamo la stima della bontà del matching con l'errore reale misurato. Poter dare una stima accurata della qualità del matching per ogni vertice è infatti molto importante poiché è possibile, in un passo successivo, raffinare l'embedding nelle zone di maggior errore. Per determinare in che misura la definizione del descrittore della superficie incide nell'errore delle corrispondenze in 7.3.4 viene calcolato l'errore considerando l'allineamento ideale degli embedding sferici. Gli ultimi due esperimenti dimostrano l'indipendenza del nostro metodo dalla scala

7.3.5 e dal campionamento della forma 7.3.6.

7.3.1 Distribuzione dell'errore di matching al variare di r_g

Il descrittore della superficie, come spiegato precedentemente (6.1), viene utilizzato per l'allineamento dei due embedding sferici; in questo modo l'allineamento è indipendente dal campionamento della superficie. Tale descrittore deve essere caratterizzante delle diverse zone della superficie e invariante alle isometrie. Un descrittore con tali caratteristiche è il descrittore del flusso geodesico. Seppure invariante alle isometrie è risultato nella sperimentazione molto sensibile a piccole trasformazioni non isometriche. Per correggere tale comportamento abbiamo sviluppato un descrittore del flusso geodesico limitato ad un determinato raggio dal punto considerato 6.1.2. Lo scopo della sperimentazione di questa sezione è quello di verificare il comportamento del matching al variare del raggio con cui viene calcolato il descrittore del flusso geodesico ed individuarne il valore più appropriato per il resto degli esperimenti.

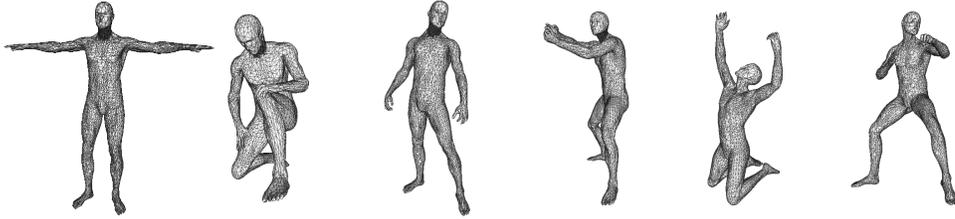
Per ogni modello sono presenti tre istogrammi a pila che visualizzano il numero di vertici con un certo intervallo di errore misurato per ogni trasformazione. Affiancato a ciascun istogramma c'è un grafico che mostra la distribuzione dell'errore, ovvero la percentuale di vertici che ha l'errore compreso in un determinato intervallo unitario. Gli istogrammi rappresentano la qualità del matching in termini di numero di vertici al di sotto di una determinata soglia di errore. Possiamo osservare il loro cambiamento al variare del raggio utilizzato per il calcolo del flusso geodesico. Il raggio è rapportato alla distanza media geodesica tra i vertici

del modello che si esprime come:

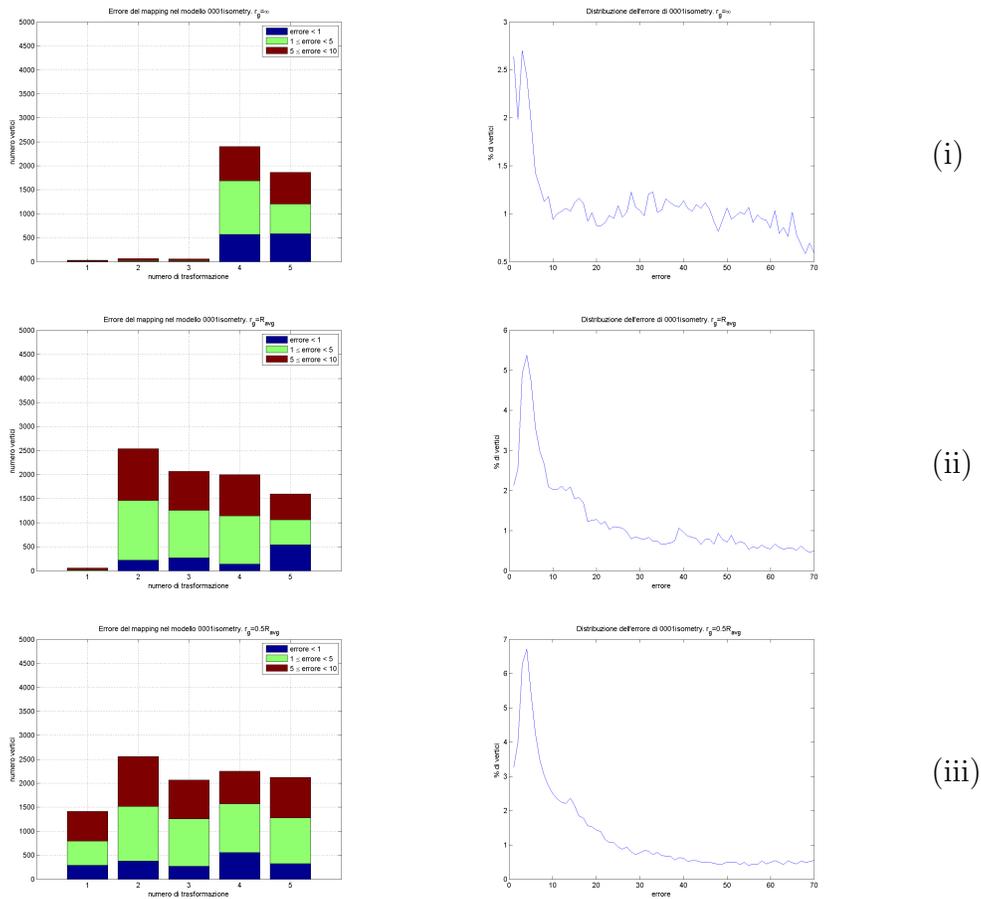
$$R_{avg} = \frac{1}{n^2} \sum_{i,j=1\dots n} D_g(i, j) \quad (7.2)$$

Come possiamo vedere dagli istogrammi, al decrescere del raggio usato per il calcolo del flusso geodesico locale è possibile riconoscere ed allineare più trasformazioni, seppure i picchi in termini di numero di vertici con errore al di sotto di una certa soglia si abbassino. La diminuzione del raggio influenza in egual modo anche gli istogrammi, infatti con raggio $r_g = \infty$ la decrescita della curva è meno rapida e la percentuale di vertici rimane relativamente alta anche all'aumentare dell'errore.

Per capire meglio il motivo del mancato riconoscimento di alcune trasformazioni al variare del raggio con cui viene calcolato il flusso geodesico è utile osservarne i cambiamenti in figura 7.6. Possiamo osservare come nei due modelli la trasformazione isometrica porti a convogliare la maggior parte del flusso geodesico in alcuni 'canali' dovuti alla trasformazione stessa. La descrittività sulla struttura geodesica locale in questo modo viene nascosta dagli alti valori che si hanno in queste zone. Per contro, riducendo troppo r_g , si ha la perdita della struttura globale della mesh.

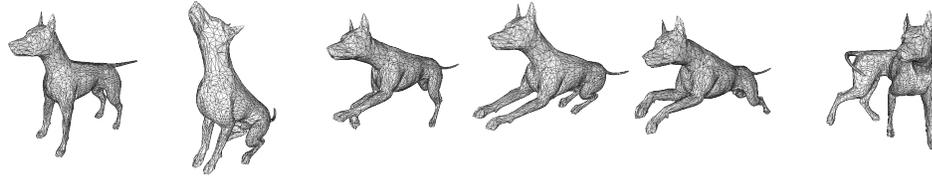


(I) Modello nullo e trasformazioni isometriche del modello 0001.isometry di SHREC2010

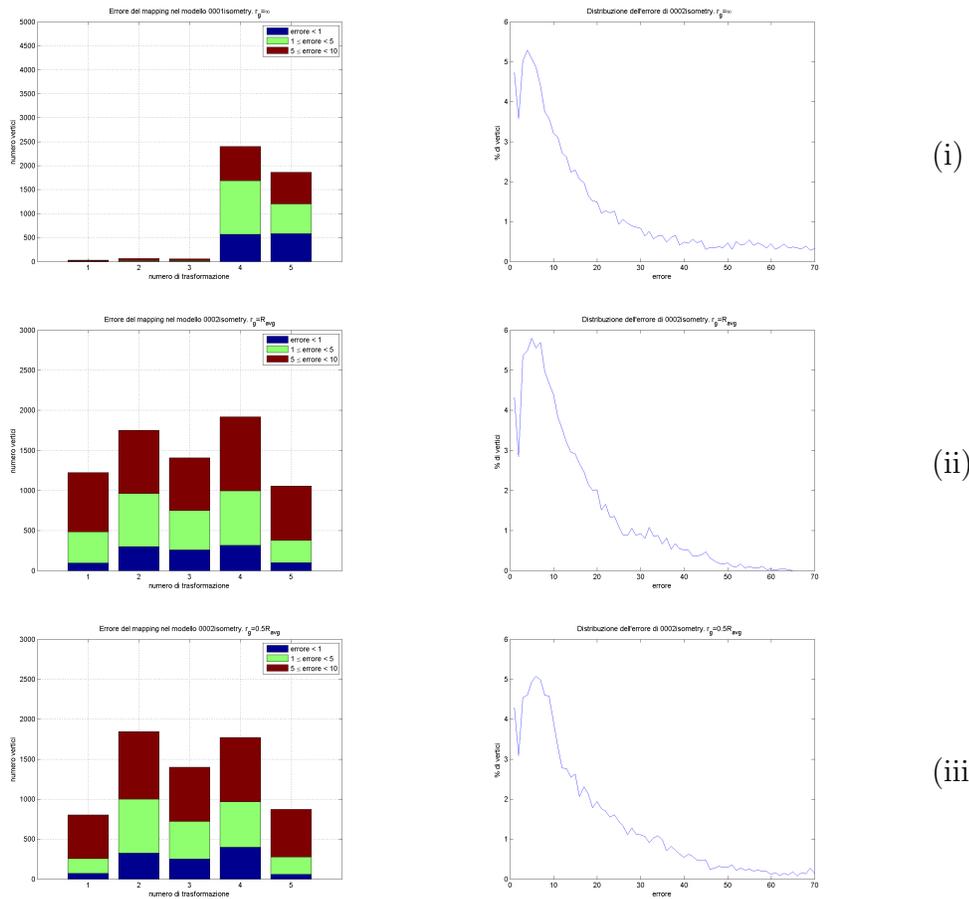


(II) Quantità di vertici con errore compreso in determinati intervalli (sinistra). Distribuzione dei vertici negli intervalli di errore unitari (destra). (i),(ii),(iii) si riferiscono alla mappa del flusso geodesico usata, rispettivamente con raggio geodesico $r_g = \infty$, $r_g = R_{avg}$, $r_g = \frac{R_{avg}}{2}$

Figura 7.3: Errore nel matching del modello 0001.isometry (Uomo) misurato come la distanza geodesica dalla soluzione esatta

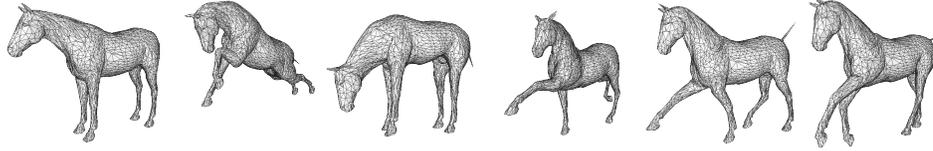


(I) Modello nullo e trasformazioni isometriche del modello 0002.isometry di SHREC2010

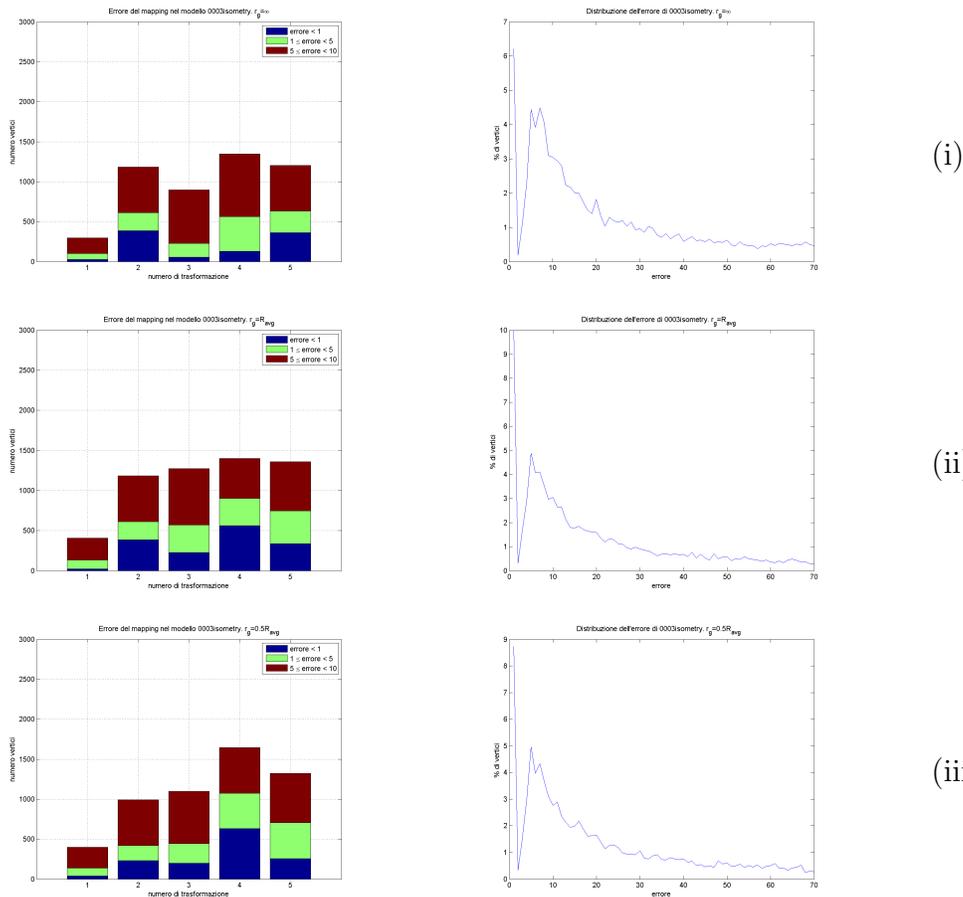


(II) Quantità di vertici con errore compreso in determinati intervalli (sinistra). Distribuzione dei vertici negli intervalli di errore unitari (destra). (i),(ii),(iii) si riferiscono alla mappa del flusso geodesico usata, rispettivamente con raggio geodesico $r_g = \infty, r_g = R_{avg}, r_g = \frac{R_{avg}}{2}$

Figura 7.4: Errore nel matching del modello 0002.isometry (Cane) misurato come la distanza geodesica dalla soluzione esatta



(I) Modello nullo e trasformazioni isometriche del modello 0003.isometry di SHREC2010

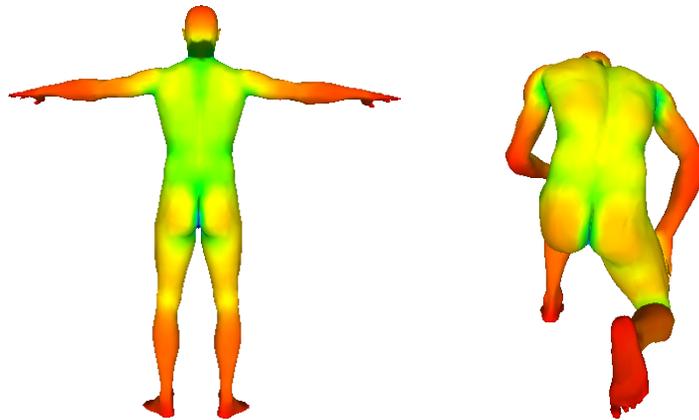


(II) Quantità di vertici con errore compreso in determinati intervalli (sinistra). Distribuzione dei vertici negli intervalli di errore unitari (destra). (i),(ii),(iii) si riferiscono alla mappa del flusso geodesico usata, rispettivamente con raggio geodesico $r_g = \infty$, $r_g = R_{avg}$, $r_g = \frac{R_{avg}}{2}$

Figura 7.5: Errore nel matching del modello 0003.isometry (Cavallo) misurato come la distanza geodesica dalla soluzione esatta



(I) Confronto del flusso geodesico calcolato con $r_g = \infty$ sul modello nullo e la prima trasformazione isometrica del modello 0001

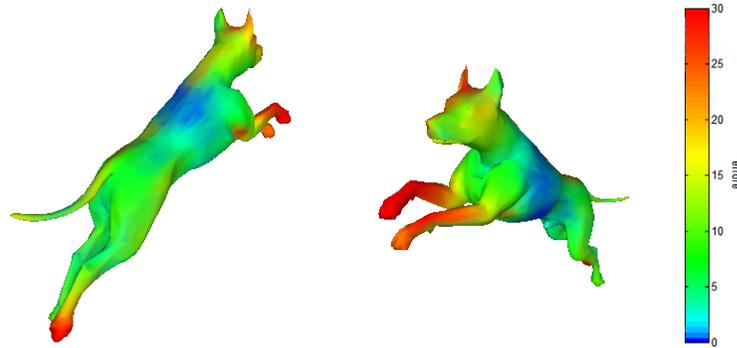


(II) Confronto del flusso geodesico calcolato con $r_g = \frac{R_{avg}}{2}$ sul modello nullo e la prima trasformazione isometrica del modello 0001

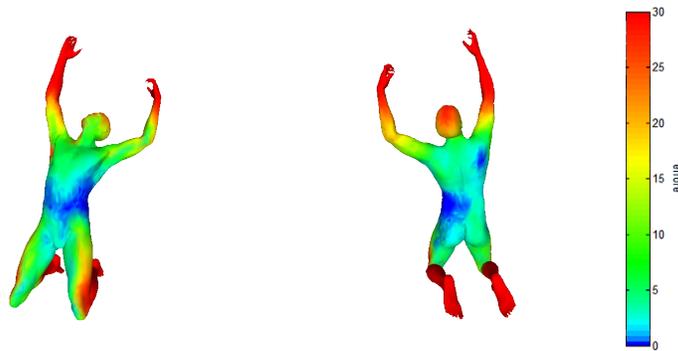
Figura 7.6: Confronto del flusso geodesico al variare del raggio con cui è calcolato

7.3.2 Distribuzione dell'errore nella forma

Nelle figure 7.7 viene visualizzata la distribuzione dell'errore di allineamento in alcune trasformazioni isometriche dei modelli. Si può notare che l'errore maggiore si ha negli arti. Ciò potrebbe essere dovuto alle zone di alta densità che si formano nell'embedding sferico in corrispondenza delle estremità e al peso inferiore che viene attribuito a tali vertici nel calcolo della tensione geodesica.



(I) Distribuzione dell'errore sul modello 0002.isometry.4



(II) Distribuzione dell'errore sul modello 0001.isometry.4

Figura 7.7: Distribuzione dell'errore sulla superficie delle figure

7.3.3 Stima dell'errore

Negli esperimenti precedenti abbiamo visto l'errore prodotto dalle corrispondenze trovate dal nostro metodo e la sua distribuzione nelle zone del modello. Tale errore è stato calcolato conoscendo la corrispondenza esatta vertice a vertice tra le due trasformazioni. In uno scenario reale questa informazione non è disponibile, tuttavia è possibile dare una stima della bontà di ciascuna corrispondenza trovata. Abbiamo visto in precedenza come l'errore tenda a concentrarsi in determinate aree. Poter stimare l'errore relativo di ciascuna corrispondenza è quindi molto importante poiché, conoscendo quali vertici sono ben posizionati e quali no, è possibile applicare tecniche di raffinamento dell'embedding nelle aree con maggior errore.

Usiamo un metodo descritto in [26] che minimizza un sistema mediante l'uso di autovettori e autovalori. Assegniamo ad ogni vertice nel modello trasformato un indice di qualità della relativa corrispondenza. La bontà di una corrispondenza dipende dal mantenimento delle distanze geodesiche tra il modello originale e l'embedding trovato. Dati l'insieme dei punti del modello nullo $x_k \in X$, della trasformazione isometrica $y_k \in Y$ e le corrispondenze trovate $(x'_k, y_k) \in C_{r_g}(X, Y)$, vogliamo assegnare un indice di qualità q_i ad ogni vertice in modo da minimizzare:

$$E(\vec{q}) = \sum_{i,j} q_i q_j (D_X(x'_i, x'_j) - D_Y(y_i, y_j))^2 \quad (7.3)$$

Costruiamo la matrice S i cui elementi sono

$$S_{i,j} = \exp^{-\lambda(D_X(x'_i, x'_j) - D_Y(y_i, y_j))^2} \quad (7.4)$$

dove λ è un parametro che ci permette di penalizzare i vertici che inducono un errore maggiore. Questa matrice avrà tutti gli elementi $0 < s_{i,j} \leq 1$

dove un valore più alto indica un errore stimato minore. Dato che la matrice S è simmetrica possiamo formulare il problema 7.3 come un quoziente di Rayleigh in cui dobbiamo trovare \vec{q} che massimizza:

$$\frac{\vec{q}^T S \vec{q}}{\|\vec{q}\|_2} \quad (7.5)$$

Data la matrice S il massimo si raggiunge quando $\|\vec{q}\|_2 = 1$ è uguale all'autovettore v_{max} con associato il massimo autovalore di S . Inoltre il teorema di Perron-Frobenius ci assicura che tutti gli elementi di v_{max} sono dello stesso segno e perciò possono essere scelti positivi. Nell'assunzione che almeno un vertice sia stato posizionato correttamente i valori dell'autovettore sono normalizzati in modo che $max(v_{max}) = 1$. Nella figura 7.9 possiamo vedere la somiglianza della mappa dell'errore e quella della stima della bontà dei vertici in due trasformazioni isometriche. Nel grafico alla fine viene mostrato l'errore misurato dei vertici in relazione alla loro qualità stimata, si può notare che al crescere della qualità l'errore medio decresce. Nella figura 7.8 abbiamo invece effettuato un filtraggio dei vertici in modo da tenere quelli con una qualità più elevata che potranno essere utilizzati per un successivo raffinamento. I grafici mostrano il numero di vertici considerati ed il loro errore medio al variare di λ .

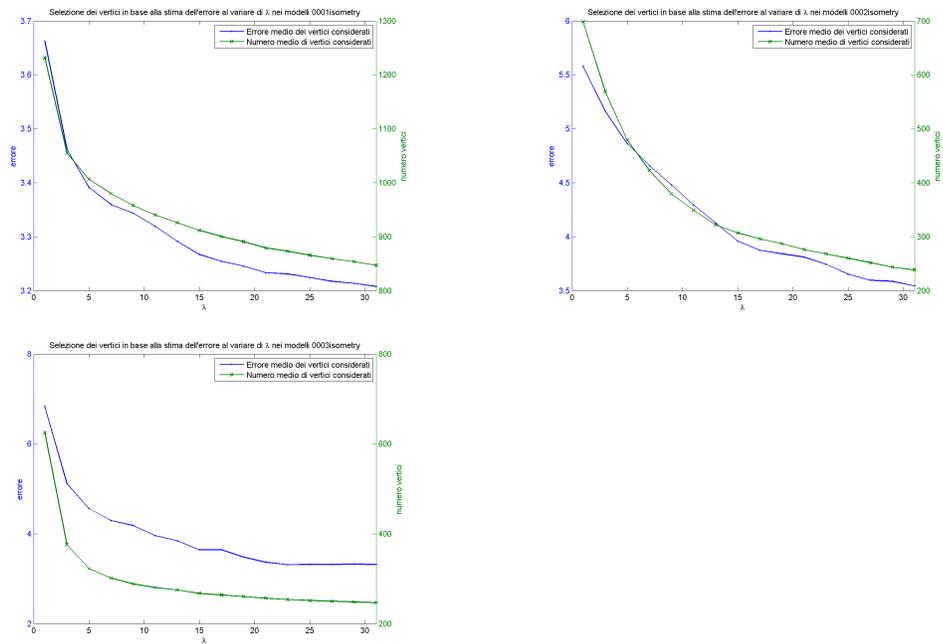


Figura 7.8: Numero ed errore medio dei vertici con associato $q_i > \frac{\max_j q_j}{2}$ nel matching con $r_g = \frac{R_{avg}}{2}$

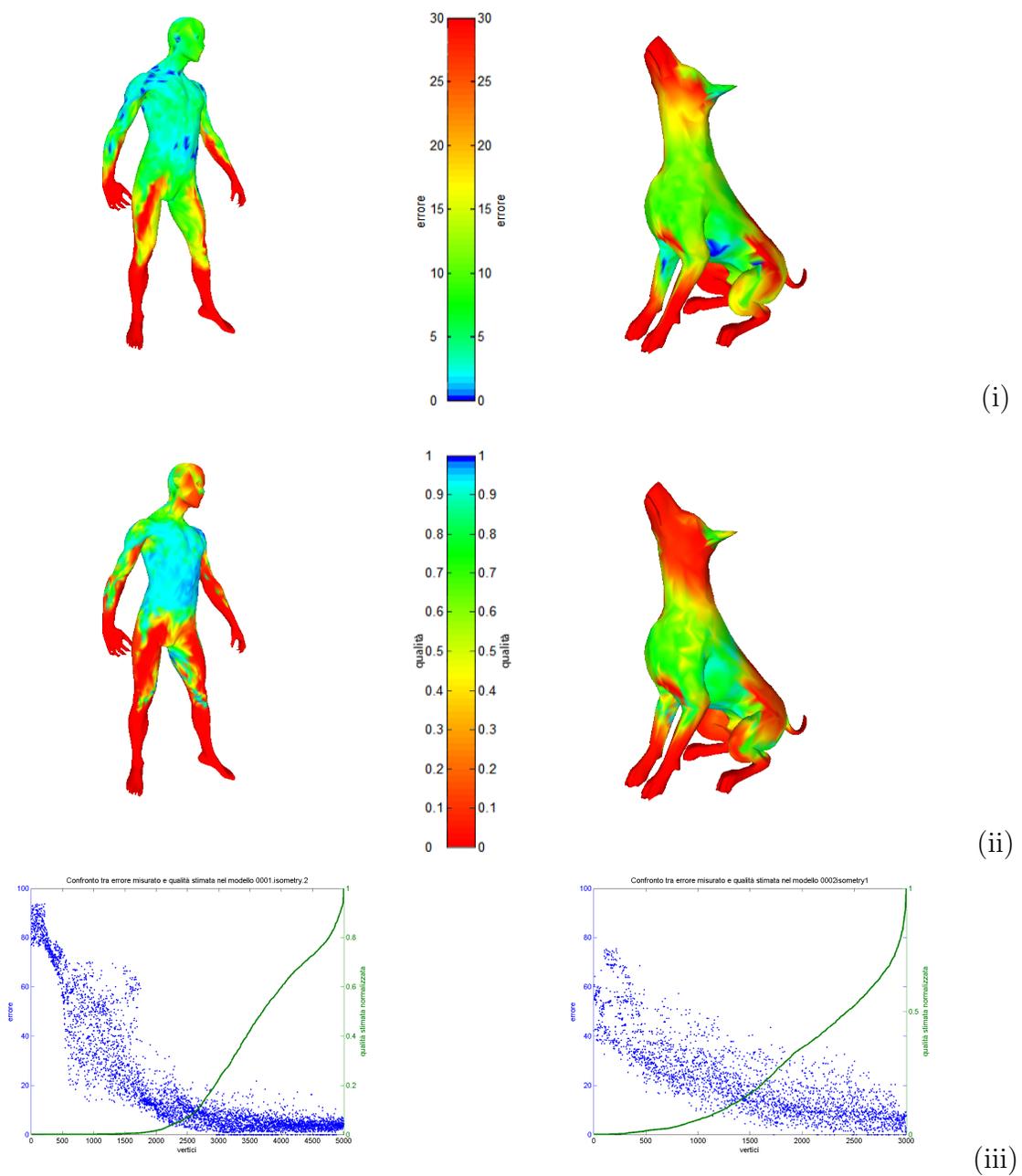


Figura 7.9: Confronto tra mappa dell'errore (i) e mappa della stima di qualità (ii) dei vertici e loro errore al variare della qualità stimata (iii).

7.3.4 Errore di allineamento

Fin'ora abbiamo misurato l'errore complessivo del nostro metodo, tuttavia esso deriva dalla somma dell'errore compiuto nelle varie fasi del metodo. Lo scopo degli esperimenti proposti qui di seguito è quello di individuare l'errore introdotto nelle diverse fasi. Ciò è utile per comprendere quali siano i punti del nostro metodo che introducono maggior errore e quindi concentrarsi sul loro miglioramento in un futuro lavoro.

Le due principali fonti di errore sono l'embedding sferico e l'allineamento delle due sfere. In quest'ultimo l'errore è introdotto dalla discretizzazione del segnale dovuto alle armoniche sferiche e, successivamente, dall'angolo di rotazione che si sceglie di usare per la ricerca esaustiva nell'intorno del primo allineamento. Possiamo tuttavia farci un'idea di tale errore. Conoscendo infatti le corrispondenze esatte tra i vertici è possibile trovare la rotazione R che allinea le sfere in modo che la distanza tra i corrispettivi vertici sia minimizzata:

$$\underset{R}{\operatorname{argmin}} \sum_{(i,j) \in C_0(X,Y)} d_g(i * R, j) \quad (7.6)$$

Per trovare R abbiamo usato una variante dell'algoritmo ICP (Iterative Closest Point) descritto in [27] dove la ricerca del vertice più vicino nella fase del matching è stata sostituita dalla corrispondenza esatta.

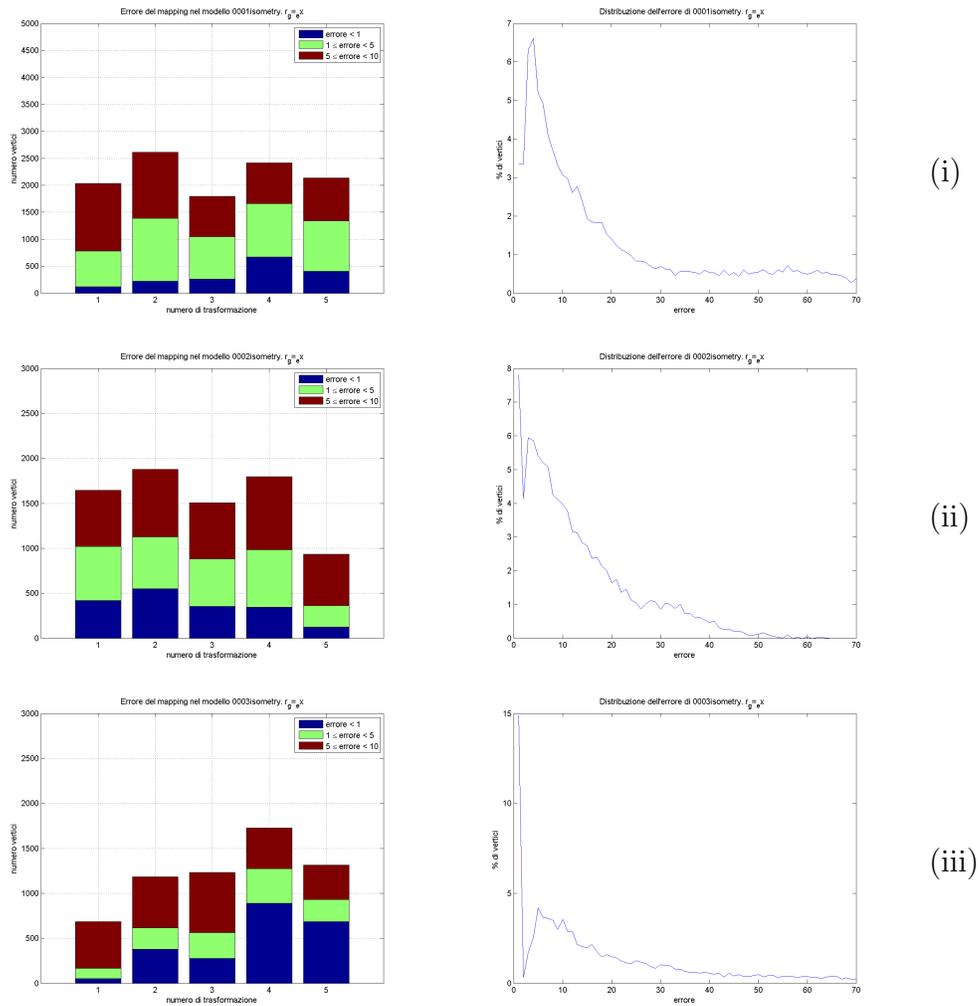


Figura 7.10: Quantità di vertici con errore compreso in determinati intervalli (sinistra). Distribuzione dei vertici negli intervalli di errore unitari (destra). (i),(ii),(iii) si riferiscono ai tre modelli di SHREC 2010 allineati minimizzando la distanza tra le coppie di corrispondenze esatte $(i, j) \in C_0(X, Y)$

7.3.5 Indipendenza dalla scala

Un aspetto importante nella ricerca di corrispondenze è l'indipendenza dalla scala. Il nostro metodo è a tutti gli effetti indipendente dalla scala, infatti l'allineamento e la ricerca di corrispondenze vengono eseguiti sulla sfera di raggio unitario. L'unico aspetto influenzato dalla scala è la distanza geodesica, tuttavia si può facilmente provare che date due forme S_0 e S_1 uguali a meno di una scala s , con $S_0 = S_1s$, la distanza di due punti $d_{S_0}(x, y), x, y \in S_0$ è pari a s volte la distanza dei corrispondenti punti in S_1 , $d_{S_1}(xs, ys) = sd_{S_0}(x, y)$. In Figura 7.12 si può vedere infatti che, a meno di un piccolo errore dovuto al diverso ordinamento dei vertici nei vari modelli, il comportamento dell'algorithm non varia al variare della scala.

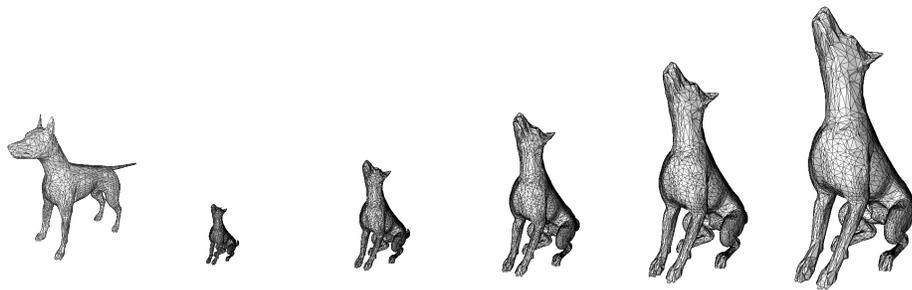


Figura 7.11: Trasformazioni scalate del modello 0002.isometry di SHREC2010

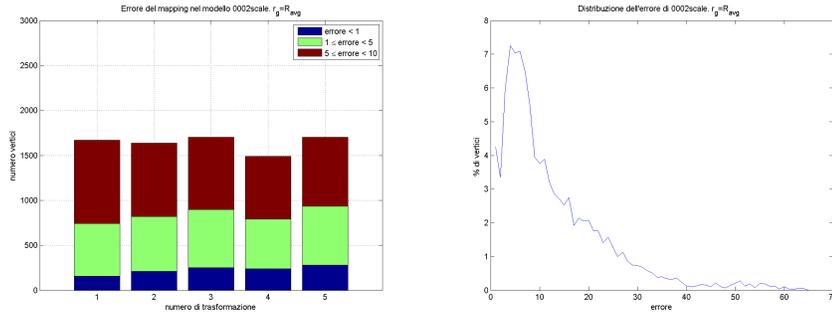


Figura 7.12: Variare dell'errore del matching al variare della scala nel modello 0002(Cane). A sinistra si può vedere la quantità di vertici con errore compreso in determinati intervalli. A destra la distribuzione dei vertici negli intervalli di errore unitari.

7.3.6 Robustezza al campionamento

La probabilità che entrambe le forme da confrontare abbiano lo stesso campionamento, cioè stessi vertici (in numero e posizione sulla superficie) e la stessa triangolazione, è nella pratica nulla. Se pensiamo infatti a modelli acquisiti tramite scanner 3D, è infatti impensabile che la scansione di due forme in posizioni diverse riproduca esattamente la stessa triangolazione. Per questo motivo un metodo che sfrutta solamente la triangolazione delle forme per la ricerca delle corrispondenze non è direttamente applicabile ai casi reali.

Nella tabella in (Figura 7.14) possiamo notare il comportamento del nostro metodo al variare del numero di punti acquisiti e della loro triangolazione. L'errore compiuto al variare del campionamento rimane pressoché costante. Un lieve aumento nell'errore delle corrispondenze si ha per i campionamenti con meno punti (4,5,6); in questi casi l'errore è cau-

sato dalla perdita di informazioni sulla superficie che si ha con la sua discretizzazione.

Come modelli di partenza sono stati usati quelli di SHREC 2010, quelli con più di 3000 vertici sono stati quindi sottoposti ad un algoritmo di semplificazione che li ha ridotti a circa 3000 vertici. Per assicurarci della reale indipendenza anche dalla posizione dei vertici è stato permesso all'algoritmo di semplificazione di spostare i vertici dalla loro posizione originale e ritriangolarli. Inoltre nella sesta trasformazione il campionamento del modello non è uniforme, cioè alcune aree hanno una densità di vertici dimezzata (Figura 7.13).

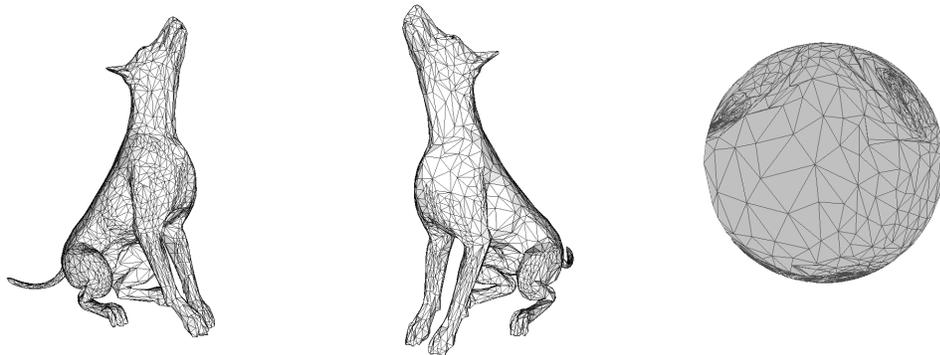


Figura 7.13: Campionamento della trasformazione numero 6. Nelle due figure a sinistra si può vedere la diversità della densità dei vertici nella forma. A destra l'embedding sferico ottenuto che mantiene la densità di campionamento delle zone mappate.

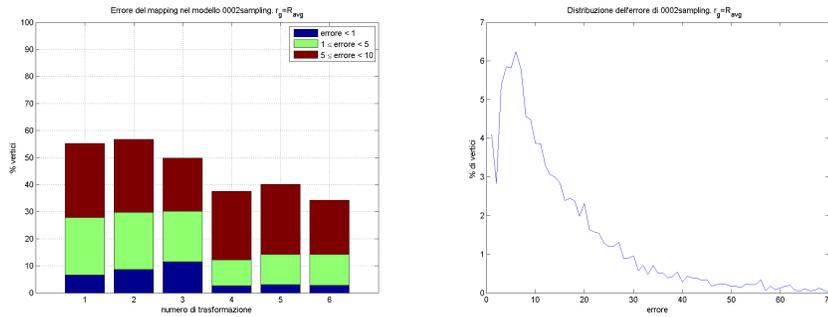


Figura 7.14: Variare dell'errore del matching al variare del numero di vertici nel modello 0002(Cane). A sinistra si può vedere la percentuale di vertici con errore compreso in determinati intervalli. A destra la distribuzione dei vertici negli intervalli di errore unitari.

Capitolo 8

Conclusioni

In questa tesi abbiamo esposto e testato un nuovo metodo per la ricerca di corrispondenze nell'ambito delle trasformazioni non rigide tra due forme senza buchi (*genus-0*) e con superficie regolare (*manifold*). Il metodo prevede di ridurre le trasformazioni isometriche delle forme a rotazioni sferiche mediante un embedding sferico di superficie e l'utilizzo di un descrittore della superficie invariante alle isometrie per il loro allineamento. Il punto fondamentale del metodo è l'embedding sferico di superficie, che si pone l'obiettivo di minimizzare la distorsione geodesica tra modello e la sua parametrizzazione sferica, evitando al contempo la presenza di compenetrazioni nella triangolazione risultante. Gli algoritmi basati sull'MDS esistenti, che ha come appunto obiettivo la minimizzazione della distorsione delle distanze geodesiche, non tengono in alcun modo in considerazione la triangolazione della superficie, producendo in questo modo un embedding in cui i triangoli si intersecano. Una parametrizzazione sferica conforme, invece, risulta in un embedding in cui le distanze sono mantenute solo considerando un piccolo introno, mentre le proporzioni

vengono distorte considerevolmente tra i diversi punti del modello. Il nostro algoritmo esprime la posizione di un punto come la combinazione lineare dei vertici adiacenti rispetto al grafo corrispondente alla triangolazione del modello, e cerca di riposizionarli in modo da minimizzare la distorsione geodesica, come nel MDS. Dagli esperimenti effettuati si può vedere come le corrispondenze ottenute risultino essere molto precise in alcune zone e meno in altre, come per esempio gli arti. Molto importante è il fatto che sia possibile dare una stima abbastanza accurata della qualità di ciascuna corrispondenza, in questo modo è possibile procedere con un raffinamento della posizione dei vertici che hanno prodotto maggior errore.

Dagli esperimenti effettuati il nostro metodo è risultato essere molto preciso in alcune zone e un po' meno in altre, come per esempio arti e coda. Molto importante è il fatto di poter stimare con buona precisione la qualità delle corrispondenze trovate, in questo modo è possibile raffinare il posizionamento dei vertici con maggior errore. Il metodo è inoltre indipendente dalla scala e robusto al campionamento della forma, anche qual'ora il campionamento non sia uniforme.

8.1 Sviluppi futuri

Dagli esperimenti effettuati l'allineamento delle sfere è risultato essere molto sensibile al descrittore della superficie. Il descrittore del flusso geodesico che abbiamo usato per costruzione è invariante alle trasformazioni isometriche. Tuttavia nei casi considerati le trasformazioni sono quasi-isometriche, poiché la natura elastica della pelle fa sì che la distanza tra due punti nella superficie del modello vari leggermente nelle diverse

posizioni. Il descrittore del flusso geodesico è molto sensibile a queste variazioni non isometriche, per mitigarne la sensibilità è stato introdotto il descrittore del flusso geodesico ‘locale’, cioè che descrive il comportamento geodesico all’interno di un determinato raggio da ciascun punto; nel determinare il raggio più adeguato bisogna trovare il giusto bilanciamento tra robustezza e descrittività. Sarebbe interessante osservare il comportamento dell’algoritmo di allineamento con l’uso di altri tipi di descrittori più robusti, come per esempio l’*heat kernel*.

Un’osservazione che si può fare sulla distribuzione dell’errore è che esso è più alto laddove la densità dei punti nell’*initial guess* è più elevata, per questo come embedding di partenza è stata usata una parametrizzazione che cerca di allontanare il più possibile i vertici uno dall’altro. Non è comunque detto che essa sia la migliore delle inizializzazioni e potrebbe risultare interessante studiare il comportamento dell’embedding sferico di superficie da noi formulato con altri punti di partenza.

Il nostro metodo vuole essere un sistema per una ricerca iniziale delle corrispondenze tra due forme, alla luce della possibilità di stimare con buona accuratezza la bontà delle corrispondenze trovate sarebbe interessante applicare un raffinamento delle aree con maggior errore. Una possibilità potrebbe essere quella di raffinare i punti con errore più elevato secondo una parametrizzazione conforme, sfruttando la sua capacità di mantenere le proporzioni delle distanze geodesiche se osservata localmente.

Bibliografia

- [1] Ron Kimmel Anastasia Dubrovina. Matching shapes by eigendecomposition of the laplace-beltrami operator. *3DPVT*, 2010.
- [2] Kim-Siang Ang and Harvey L. Mitchell. Non-rigid surface matching and its application to scoliosis modelling. *The Photogrammetric Record*, 25(130):105–118, 2010.
- [3] Michel A. Audette, Frank P. Ferrie, and Terry M. Peters. An algorithmic overview of surface registration techniques for medical imaging. *Medical Image Analysis 4(2000)*, pages 201–217, 1999.
- [4] Paul J. Besl and Neil D. McKay. A method for registration of 3-d shapes. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence - Special issue on interpretation of 3-D scenes - part II*, 1992.
- [5] I. Borg and P. Groenen. *Modern Multidimensional Scaling: Theory and Applications. 2nd edition*. Springer, 2005.
- [6] A. M. Bronstein, M. M. Bronstein, U. Castellani, A. Dubrovina, L. J. Guibas, R. P. Horaud, R. Kimmel, D. Knossow, E. von Lavan-

- te, D. Mateus, and M. Ovsjanikov. Shrec 2010: robust correspondence benchmark. *Proc. EUROGRAPHICS Workshop on 3D Object Retrieval (3DOR)*, 2010.
- [7] Alexander M. Bronstein, Michael M. Bronstein, and Ron Kimmel. Generalized multidimensional scaling: A framework for isometry-invariant partial surface matching. *PNAS* *103*,5, pages 1168–1172, 1992.
- [8] M.M. Bronstein and I. Kokkinos. Scale-invariant heat kernel signatures for non-rigid shape recognition. *CVPR*, 2010.
- [9] Manfredo Do Carmo. *Differential Geometry of Curves and Surfaces*. Prentice Hall, 1976.
- [10] Chin S. Chua and Ray Jarvis. Point Signatures: A New Representation for 3D Object Recognition. *International Journal of Computer Vision*, 25(1):63–85, October 1997.
- [11] Mateus D., Horaud R. P., Knossow D., Cuzzolin F., and Boyer E. Articulated shape matching using laplacian eigenfunctions and unsupervised point registration. *CVPR*, 2008.
- [12] T. K. Dey, H. Edelsbrunner, S. Guha, and D. V. Nekhayev. Topology preserving edge contraction. *Publ. Inst. Math. (Beograd) (N.S.)* *66*, pages 23–45, 1999.
- [13] A Elad, Y Keller, and R Kimmel. Texture mapping via spherical multi-dimensional. *Scale Space and PDE Methods in Computer Vision*, pages 443–455, 2005.

- [14] Michael S. Floater. Mean value coordinates. *Computer Aided Geometric Design* 20, pages 19–27, 2006.
- [15] Michael Garland and Paul S. Heckbert. Surface simplification using quadric error metrics. *SIGGRAPH 97*, 1997.
- [16] Craig Gotsman, Xianfeng Gu, and Alla Sheffer. Fundamentals of spherical parameterization for 3d meshes. *ACM Trans. Graph.*, 22:358–363, July 2003.
- [17] Craig Gotsman and Xianfeng Gu and Alla Sheffer. Fundamentals of spherical parametrization for 3d meshes. *ACM Trans. on Graphics (SIGGRAPH)*, pages 358–363, 2003.
- [18] Xianfeng Gu, Yalin Wang, Tony F. Chan, Paul M. Thompson, , and Shing-Tung Yau. Genus zero surface conformal mapping and its application to brain surface mapping. *IEEE Transaction on Medical Imaging*, 23(8), pages 949–958, 2004.
- [19] B. Gutman, Y. Wang, T. F. Chan, P. M. Thompson, and A. W. Toga. Shape registration with spherical cross correlation, 2nd. *MICCAI Workshop on Mathematical Foundations of Computational Anatomy*, pages 56–67, 2008.
- [20] Steven Haker, Sigurd Angenent, Allen Tannenbaum, Ron Kikinis, Guillermo Sapiro, and Michael Halle. Conformal surface parameterization for texture mapping. *IEEE Transactions on Visualization and Computer Graphics*, 6:181–189, April 2000.

- [21] Qi-Xing Huang, Bart Adams, Martin Wicke, and Leonidas J. Guibas. Non-rigid registration under isometric deformations. *Comput. Graph. Forum*, 27(5):1449–1457, 2008.
- [22] E. Huot¹, H. Yahia¹, I. Herlin¹, and I. Cohen. Surface matching: geodesic distance evolution pdes on manifolds, December 2011.
- [23] Martin Isenburg, Stefan Gumhold, and Craig Gotsman. Connectivity shapes. *Proceedings of Visualization 2001*, pages 135–142, 2001.
- [24] Miao Jin, Junho Kim, and Xianfeng David Gu. Discrete surface ricci flow: theory and applications. In *Proceedings of the 12th IMA international conference on Mathematics of surfaces XII*, pages 209–232, Berlin, Heidelberg, 2007. Springer-Verlag.
- [25] Andrew Johnson. *Spin-Images: A Representation for 3-D Surface Matching*. PhD thesis, Robotics Institute, Carnegie Mellon University, Pittsburgh, PA, August 1997.
- [26] Vladimir G. Kim, Yaron Lipman, and Thomas Funkouser. Blended intrinsic maps. *Transaction on Graphics (Proc. ACM SIGGRAPH 2011)*, 2011.
- [27] Hans Martin Kjer. *Evaluation of surface registration algorithms for PET motion correction*. Technical University of Denmark (DTU), 2010.
- [28] Torsten Langer, Alexander Belyaev, and Hans-Peter Seidel. Spherical barycentric coordinates. *Eurographics Symposium on Geometry Processing*, 2006.

- [29] Hongdong Li and Richard Hartley. New 3d fourier descriptors for genus-zero mesh objects. 2006.
- [30] Yaron Lipman and Thomas Funkhouser. Mobius voting for surface correspondence. *ACM Transactions on Graphics (Proc. SIGGRAPH)*, 28(3), August 2009.
- [31] Per-Olov Lowden. *Advances in Quantum Chemistry, Volume 7*. Academic Press, 1973.
- [32] Szymon Rusinkiewicz and Marc Levoy. Efficient variants of the ICP algorithm. In *Third International Conference on 3D Digital Imaging and Modeling (3DIM)*, June 2001.
- [33] Shadi Saba, Irad Yavneh, Craig Gotsman, and Alla Sheffer. Practical spherical embedding of manifold triangle meshes. *SMT'05*, pages 258–267, 2005.
- [34] Joaquim Salvi, Carles Matabosch, David Fofi, and Josep Forest. A review of recent range image registration methods with accuracy evaluation. *Image Vision Comput.*, 25:578–596, May 2007.
- [35] Alla Sheffer and Eric de Sturler. Parameterization of faceted surfaces for meshing using angle-based flattening. *Eng. Comput. (Lond.)*, 17(3):326–337, 2001.
- [36] E. Steinitz. *Polyeder und Raumeinteilungen*. Encyclopadie der mathematischen Wissenschaften, Band 3 (Geometries), 1922.
- [37] Vitaly Surazhsky, Tatiana Surazhsky, Danil Kirsanov, Steven Gortler, and Hugues Hoppe. Fast exact and approximate geodesics on meshes. *ACM Trans. on Graphics (SIGGRAPH)*, 2005.

- [38] W. T. Tutte. How to draw a graph. *How to draw a graph*, pages 743–768, 1963.
- [39] Chaohui Wang, Michael M. Bronstein, and Nikos Paragios. Discrete minimum distortion correspondence problems for non-rigid shape matching. Rapport de recherche RR-7333, INRIA, July 2010.