Studio di funzione

Filippo Bergamasco

Si studi la seguente funzione:

$$f(x) = \frac{(x+2)|x|}{1-x^2} \tag{1}$$

e se ne disegni il grafico.

Dominio

La funzione (1) esiste in tutti i punti per cui il denominatore è diverso da zero, ossia

$$1 - x^2 \neq 0 \Leftrightarrow x^2 \neq 1 \Leftrightarrow x \neq \pm 1$$

Il dominio della funzione è quindi $dom(f) = \forall x \in R \backslash \{-1, +1\}$.

Simmetrie

Controlliamo se la funzione è pari o dispari

$$\begin{aligned} f(-x) &= \frac{(-x+2)|-x|}{1-(-x)^2} \\ &= \frac{(-x+2)|x|}{1-x^2} \end{aligned}$$

è diversa da $f(x)$ e da $-f(x)$. La funzione non è nè pari nè dispari.

Intesezioni con gli assi

Asse x

$$\frac{(x+2)|x|}{1-x^2} = 0$$

se

$$x + 2 = 0 \quad \vee \quad |x| = 0$$
$$x = -2 \quad \vee \quad x = 0$$

Il grafico della funzione ha due punti di intersezione con l'asse delle ascisse, rispettivamente $A = (-2, 0)$ e $O = (0, 0)$.

Asse y

$$\begin{cases} y & = \frac{(x+2)|x|}{1-x^2} \\ x & = 0 \end{cases}$$

ossia

$$\begin{cases} y & = \frac{(0+2)|0|}{1-0^2} = 0 \\ x & = 0 \end{cases}$$

Il grafico della funzione ha un solo punto di intersezione con l'asse delle ordinate: $O = (0, 0)$.

Studio del segno

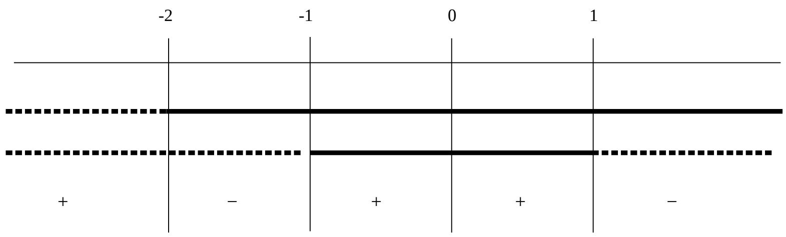
Essendo $|x| \geq 0$, il numeratore è positivo sse

$$x + 2 > 0 \Leftrightarrow x > -2$$

il denominatore è positivo sse

$$1 - x^2 > 0 \Leftrightarrow -1 < x < 1$$

Segno della funzione:



La funzione è maggiore o uguale a zero quando:

$$x < -2 \qquad \text{oppure} \qquad -1 < x < 1$$

Limiti notevoli

$$\begin{aligned}\lim_{x\to-\infty}\frac{(x+2)|x|}{1-x^2} &= \lim_{x\to-\infty}-\frac{x^2+2x}{1-x^2}\\ \lim_{x\to-\infty}\frac{-x^2-2x}{-x^2+1} &= 1\end{aligned}$$

La funzione ha un asintoto orizzontale ($y=1$) per $x\to-\infty$.

$$\begin{aligned}\lim_{x\to+\infty}\frac{(x+2)|x|}{1-x^2} &= \lim_{x\to+\infty}\frac{x^2+2x}{1-x^2}\\ \lim_{x\to+\infty}\frac{x^2+2x}{-x^2+1} &= -1\end{aligned}$$

La funzione ha un asintoto orizzontale ($y=-1$) per $x\to+\infty$.

$$\lim_{x\to-1^-}\frac{(x+2)|x|}{1-x^2}=[\frac{1}{0^-}]=-\infty$$

$$\lim_{x\to-1^+}\frac{(x+2)|x|}{1-x^2}=[\frac{1}{0^+}]=+\infty$$

La funzione ha un asintoto verticale per $x\to-1$.

$$\lim_{x\to1^-}\frac{(x+2)|x|}{1-x^2}=[\frac{3}{0^+}]=+\infty$$

$$\lim_{x\to+1^+}\frac{(x+2)|x|}{1-x^2}=[\frac{3}{0^-}]=-\infty$$

La funzione ha un asintoto verticale per $x\to1$.

Derivata prima

Per lo studio della derivata prima della funzione (1) è conveniente usare la definizione equivalente

$$y=\begin{cases}\frac{x^2+2x}{1-x^2} & \text{se } x\geq 0\\ \frac{-x^2-2x}{1-x^2} & \text{altrimenti}\end{cases}$$

Per $x\geq 0$, abbiamo

$$
\begin{aligned}
y' &= \frac{(2x+2)(1-x^2)-(x^2+2x)(-2x)}{(1-x^2)^2} \\
&= \frac{2x-2x^3+2-2x^2+2x^3+4x^2}{(1-x^2)^2} \\
&= \frac{2x^2+2x+2}{(1-x^2)^2}
\end{aligned}
$$

Per $x < 0$:

$$y' = -\frac{2x^2+2x+2}{(1-x^2)^2}$$

Quindi:

$$y' = f'(x) = \begin{cases} \frac{2x^2+2x+2}{(1-x^2)^2} & \text{se } x > 0 \\ -\frac{2x^2+2x+2}{(1-x^2)^2} & \text{altrimenti} \end{cases} \tag{2}$$

Dobbiamo controllare il comportamento della derivata in $x = 0$. Nel nostro caso:

$$\lim_{x \to 0^-} -\frac{2x^2+2x+2}{(1-x^2)^2} = -2$$

mentre

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{2x^2+2x+2}{(1-x^2)^2} = 2$$

Quindi in $O(0,0)$ abbiamo un punto angoloso.

Punti di stazionarietà

La funzione (2) non si annnulla mai, perchè il polinomio $2x^2 + 2x + 2$ non ammette radici reali.

Massimi e minimi

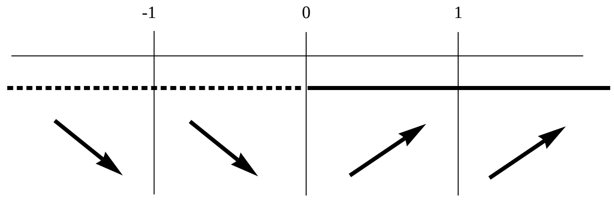
Studiamo il segno della derivata per $x \geq 0 \land x \neq 1$:

$$
\begin{aligned}
2x^2+2x+2 > 0 &\quad \forall x \in R \\
(1-x^2)^2 > 0 &\quad \forall x \in R
\end{aligned}
$$

Per $x < 0 \land x \neq -1$

$$-(2x^2 + 2x + 2) > 0 \qquad \text{mai}$$
$$(1 - x^2)^2 > 0 \quad \forall x \in R$$

Si ha quindi:



La funzione ha un minimo locale in $O(0,0)$

Grafico