Corso di Visione Artificiale

Filtri – III parte

Samuel Rota Bulò

Filtri morfologici

- I filtri morfologici trattano le immagini come insiemi di punti (x,y). Un'immagine è quindi vista come un insieme

$$A \subseteq \mathbb{Z}^2$$

- Un **filtro morfologico** è una funzione che trasforma un insieme di punti in un altro insieme di punti.

$$f : \mathbb{Z}^2 \to \mathbb{Z}^2$$

- Definiamo la **traslazione** di un immagine A per mezzo di un punto $z=(z_1,z_2)$ come

$$(A)_z = \{b + z \,:\, b \in A\}$$

- Definiamo **riflessione** di un immagine A come

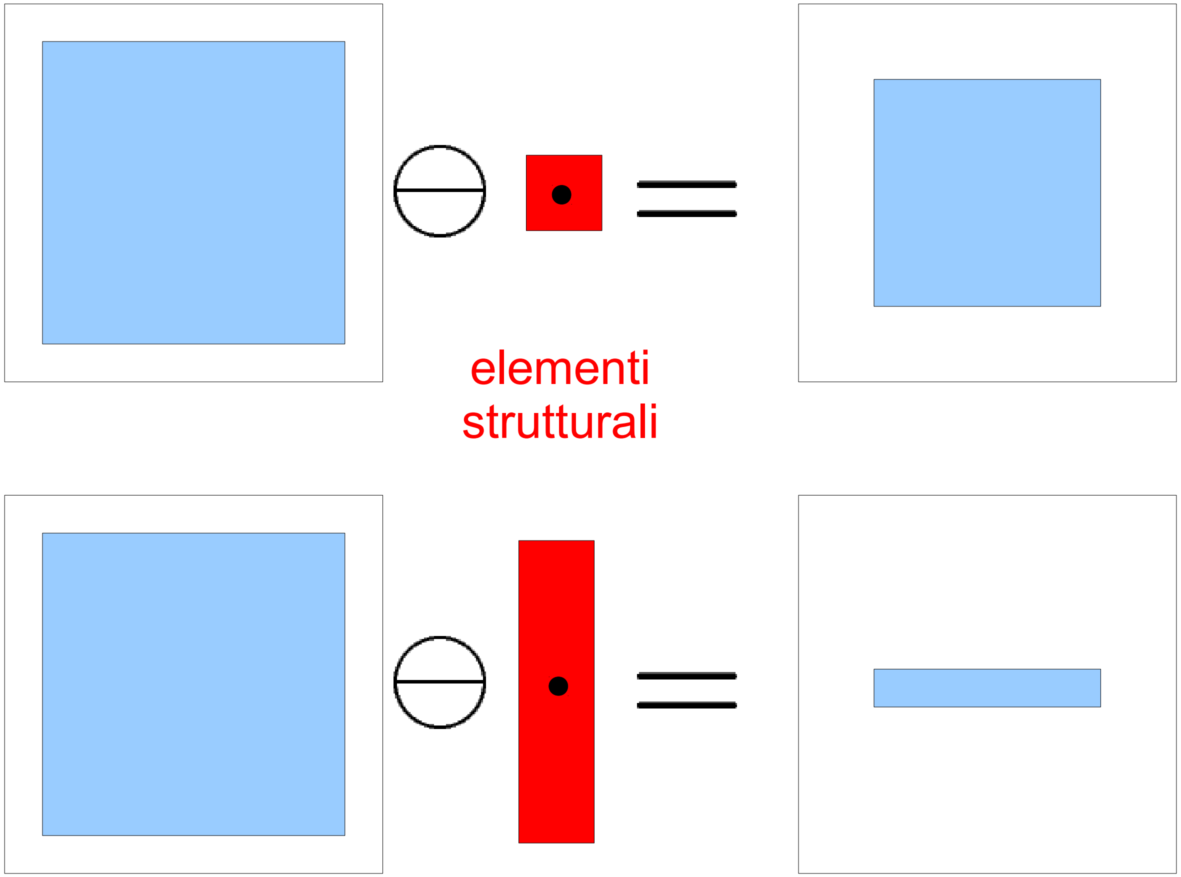
$$\hat{A} = \{-b \,:\, b \in A\}$$

- Valgono tutte le operazioni insiemistiche classiche.

Erosione

- Definiamo l'**erosione** di A per mezzo di B come

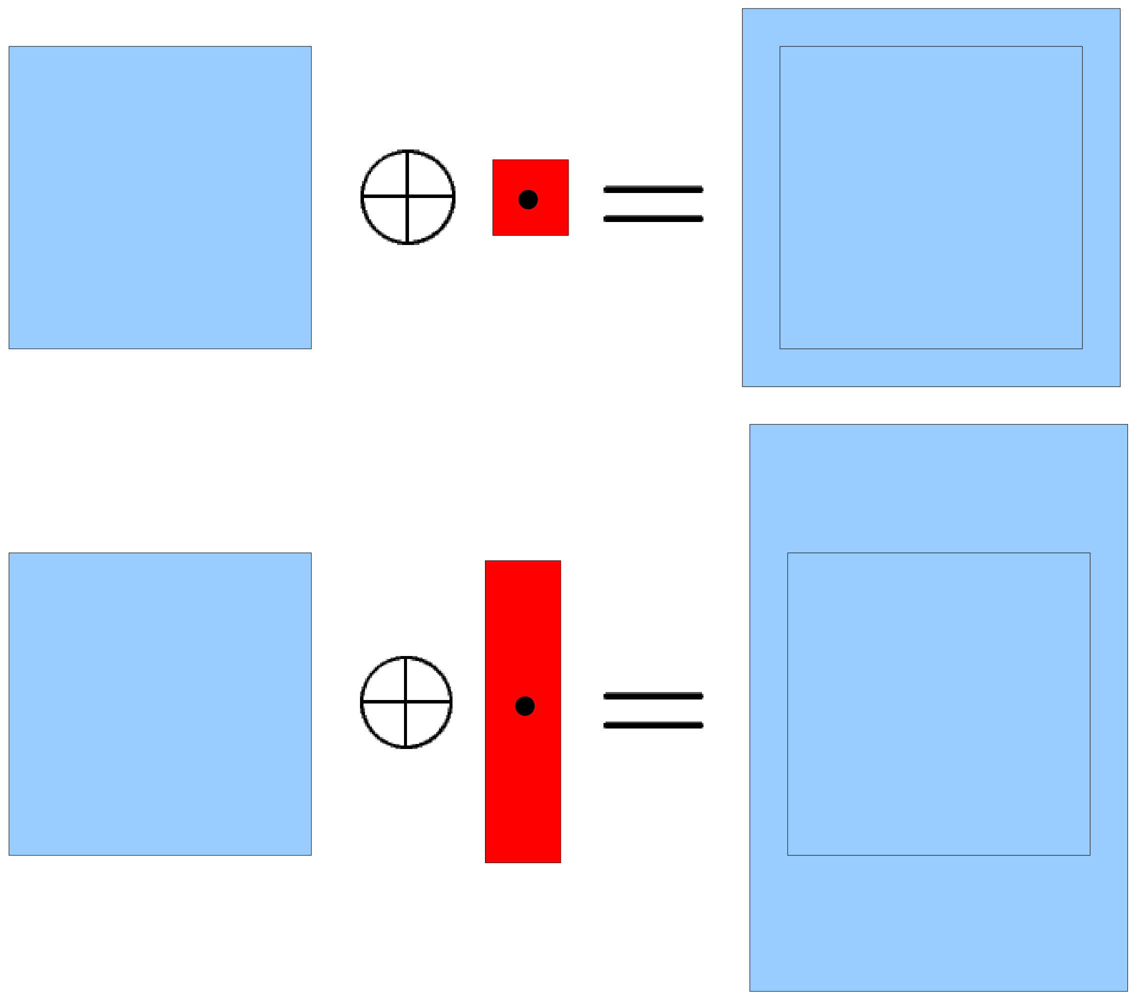
$$A \ominus B = \{z : (B)_z \cap A^c = \emptyset\}$$



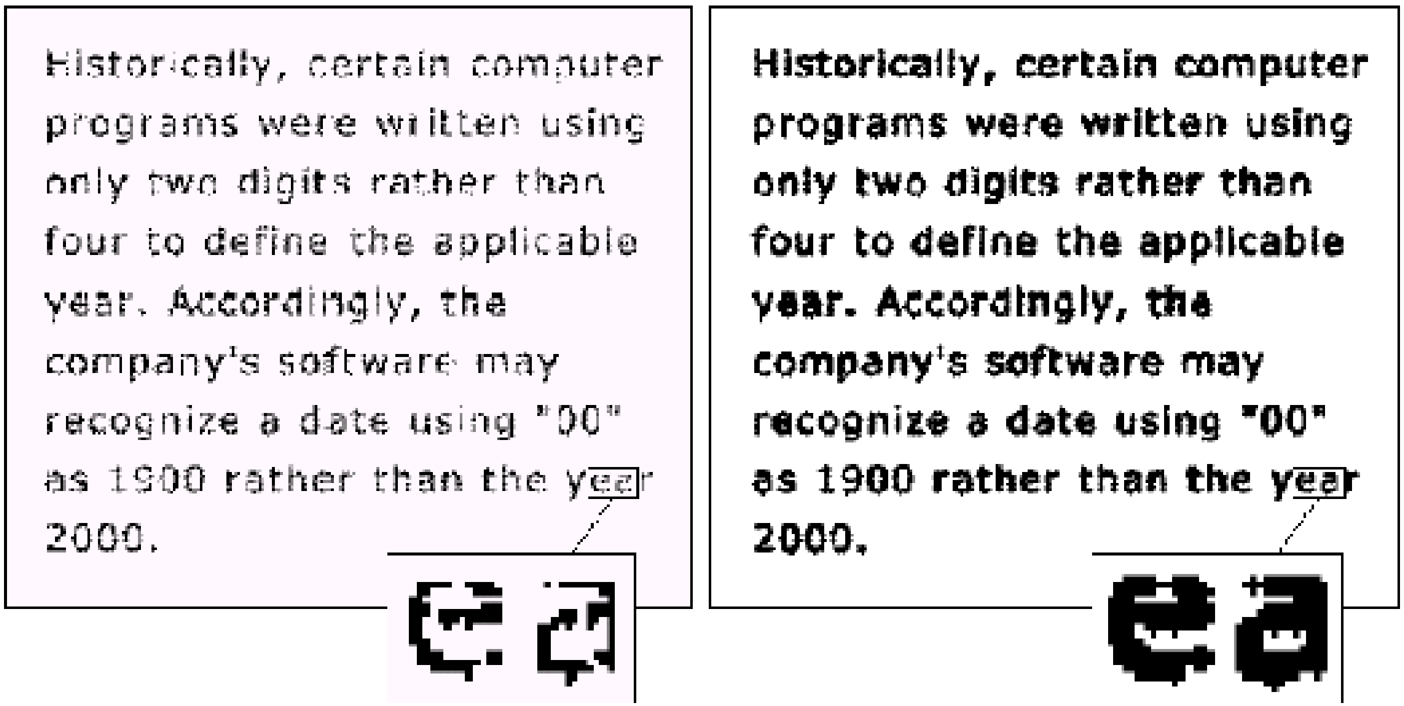
Dilatazione

- Definiamo la **dilatazione** di A per mezzo di B come

$$A \oplus B = \{z : (\hat{B})_z \cap A \neq \emptyset\}$$

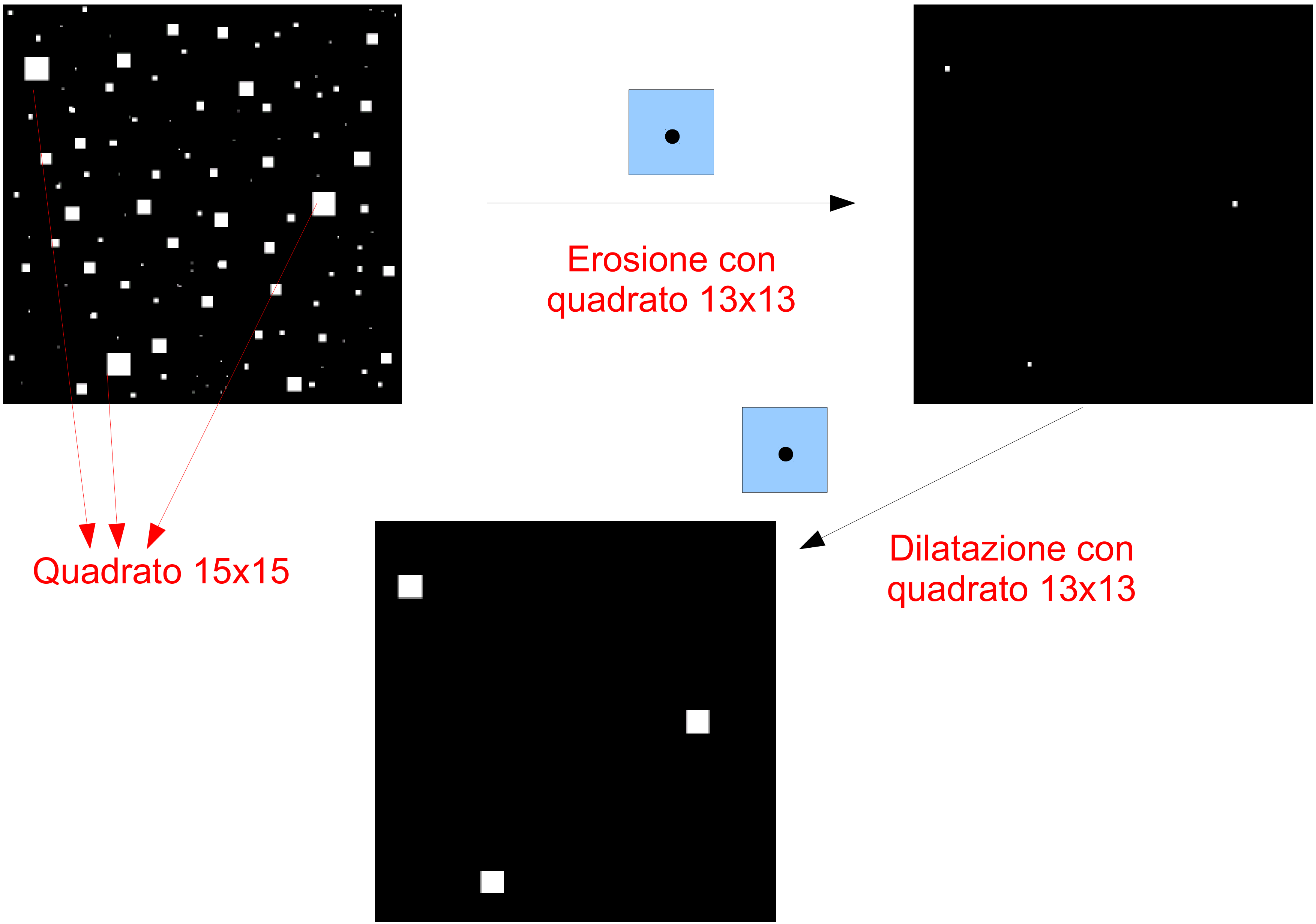


Dilatazione



0	1	0
1	1	1
0	1	0

Erosione e Dilatazione



Dualità tra Erosione e Dilatazione

$$A \ominus B = (A^c \oplus \hat{B})^c$$

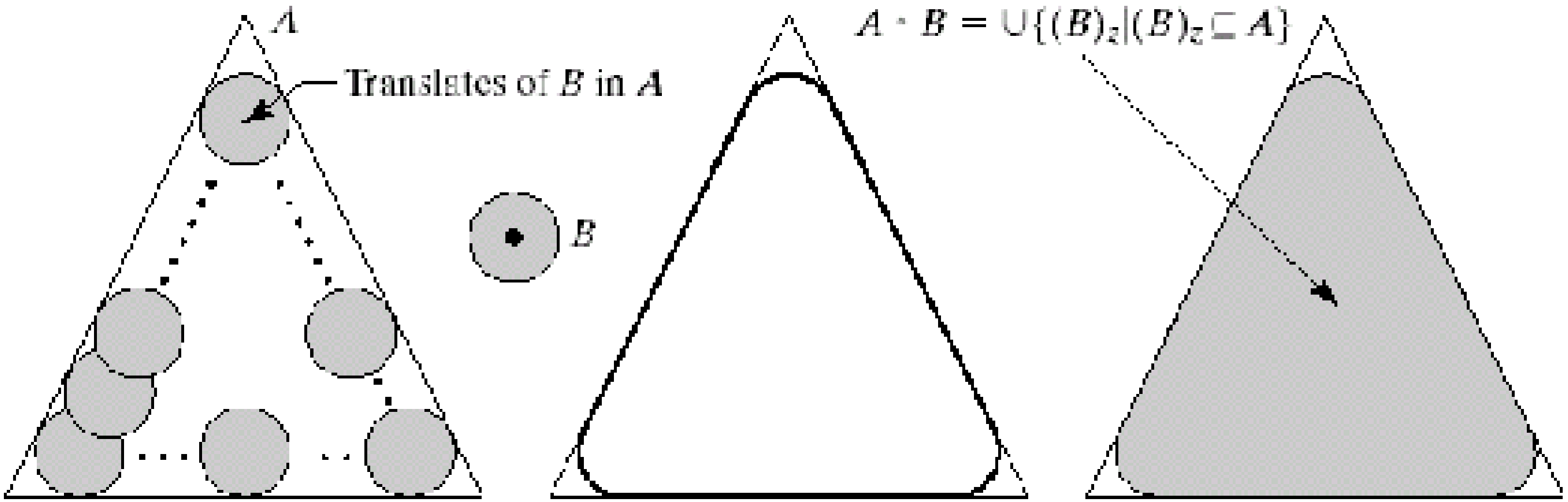
$$A \oplus B = (A^c \ominus \hat{B})^c$$

Apertura

- Definiamo l'**apertura** di A per mezzo di B come

$$A \circ B = (A \ominus B) \oplus B = \bigcup \{(B)_z \,:\, (B)_z \subseteq A\}$$

- L'apertura smussa il contorno di un oggetto, rompe piccoli canali di connessione, elimina piccole protuberanze.



Proprietà dell'Apertura

$$A \circ B \subseteq A$$

$$C \subseteq D \Rightarrow C \circ B \subseteq D \circ B$$

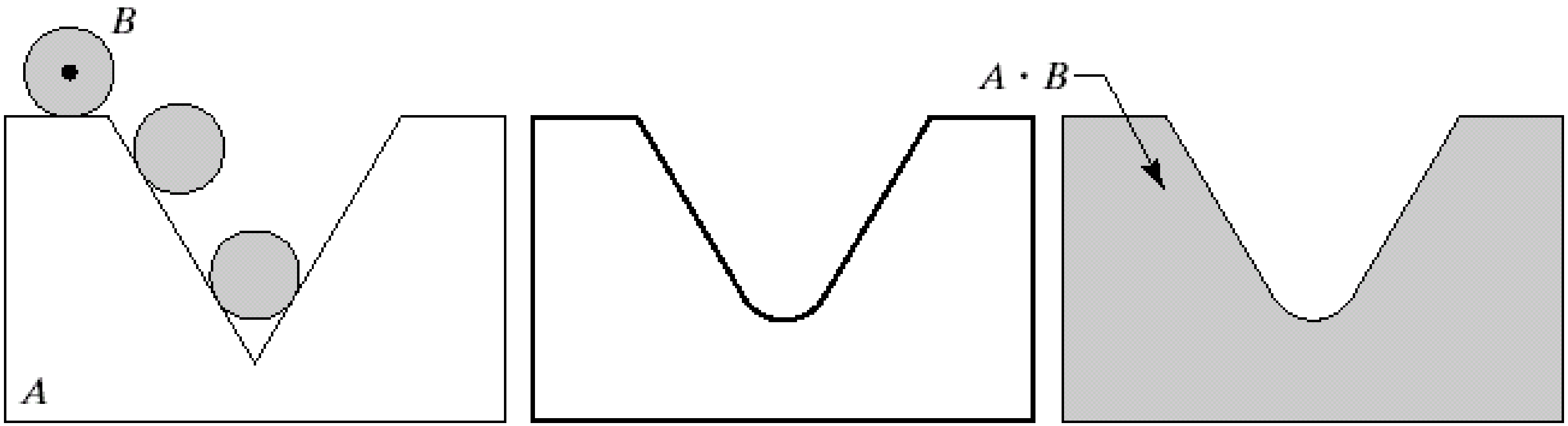
$$(A \circ B) \circ B = A \circ B$$

Chiusura

- Definiamo la **chiusura** di A per mezzo di B come

$$A \bullet B = (A \oplus B) \ominus B$$

- Fonde piccole spaccature e lunghe strette insenature, elimina piccoli buchi e riempie buchi lungo il contorno.



Proprietà della Chiusura

$$A \subseteq A \bullet B$$

$$C \subseteq D \Rightarrow C \bullet B \subseteq D \bullet B$$

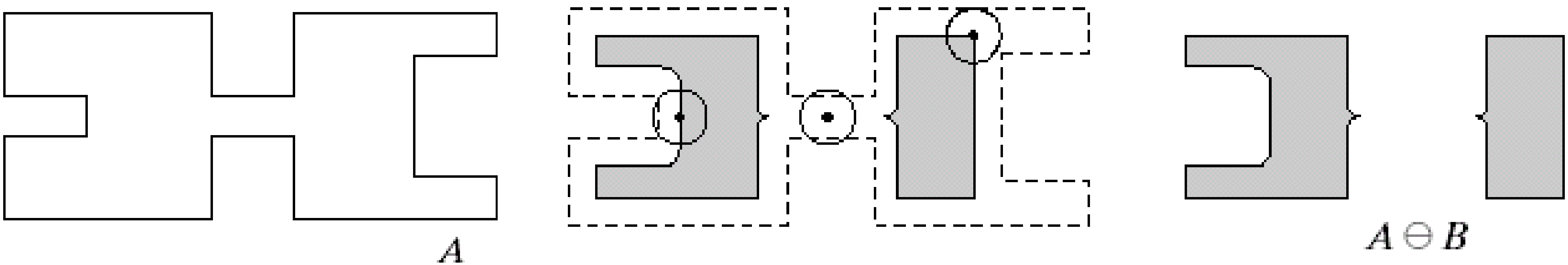
$$(A \bullet B) \bullet B = A \bullet B$$

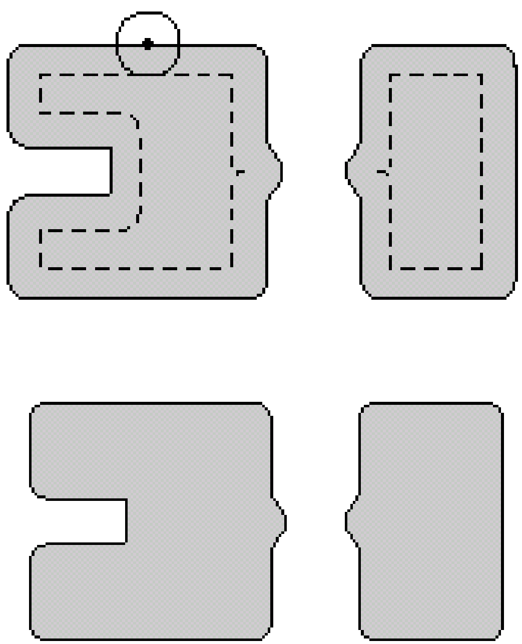
Dualità tra Apertura e Chiusura

$$A \circ B = (A^c \bullet \hat{B})^c$$

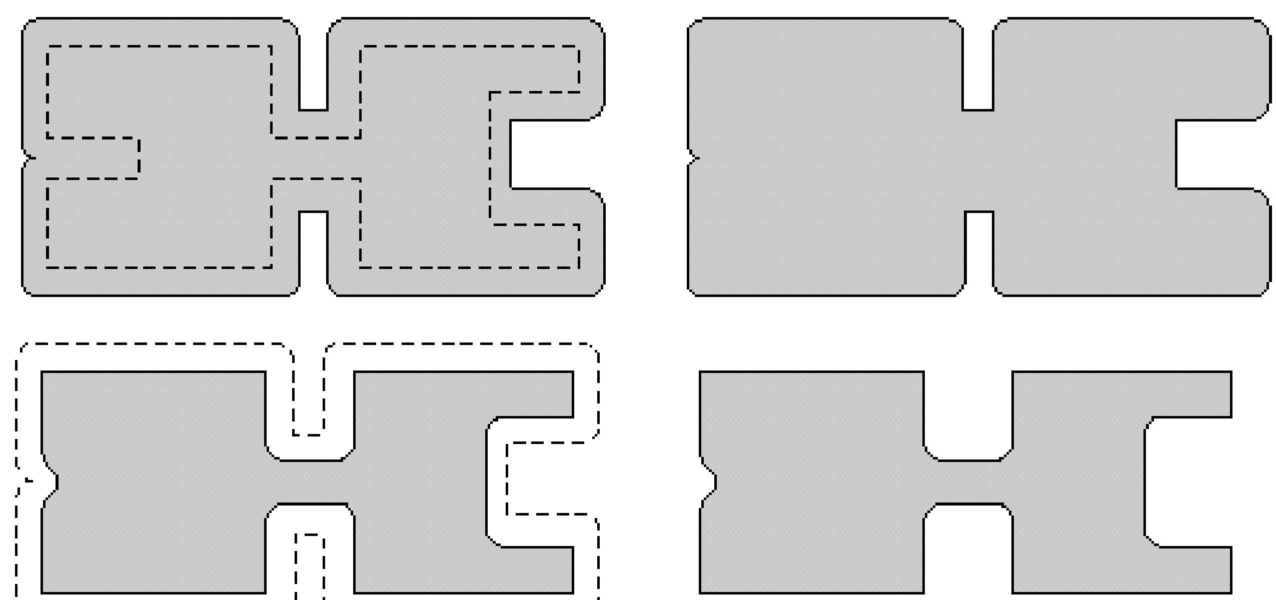
$$A \bullet B = (A^c \circ \hat{B})^c$$

Apertura e chiusura



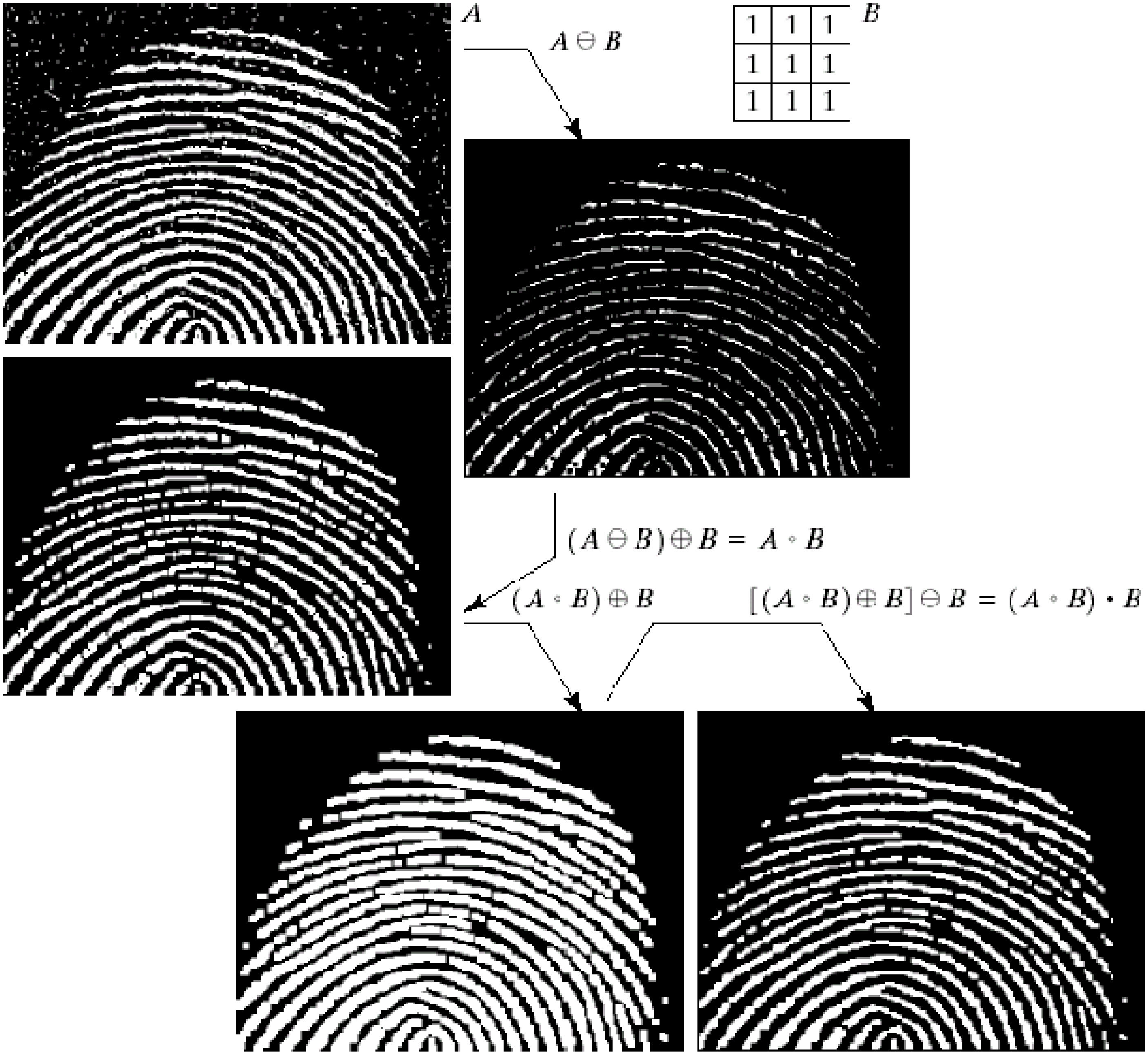


$A \circ B = (A \ominus B) \oplus B$



$A \bullet B = (A \oplus B) \ominus B$

Esempio



A
$A \ominus B$
B
1 1 1
1 1 1
1 1 1
$(A \ominus B) \oplus B = A \circ B$
$(A \circ B) \oplus B$
$[(A \circ B) \oplus B] \ominus B = (A \circ B) \bullet B$

Hit-or-Miss

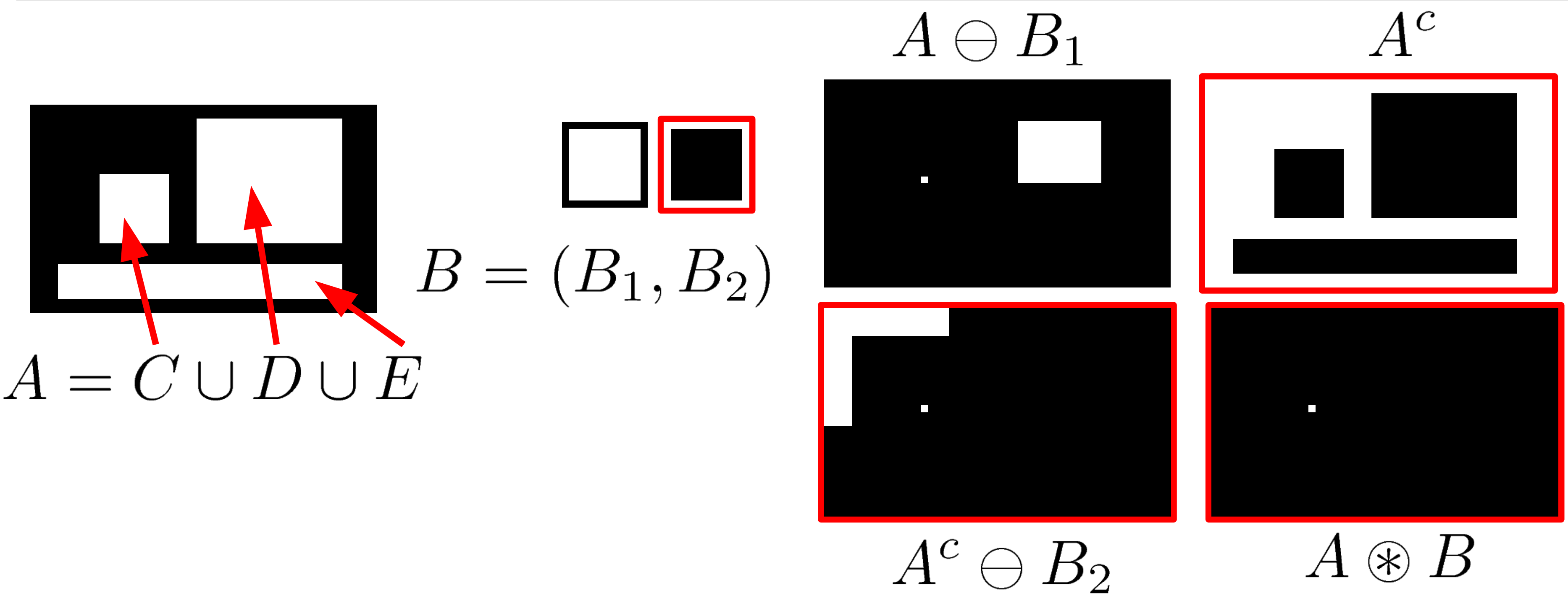
- Definiamo la trasformazione **hit-or-miss** di A per mezzo di $B=(B_1,B_2)$ come

$$A \circledast B = (A \ominus B_1) \cap (A^c \ominus B_2)$$

dove $\quad B_1 \cap B_2 = \emptyset$

- Ritorna tutti i punti in cui B_1 ha trovato una corrispondenza (hit) in A e B_2 ha trovato una corrispondenza (miss) in A^c.

- Se B non è una coppia assumiamo implicitamente (B,B^c).



Estrazione di contorno

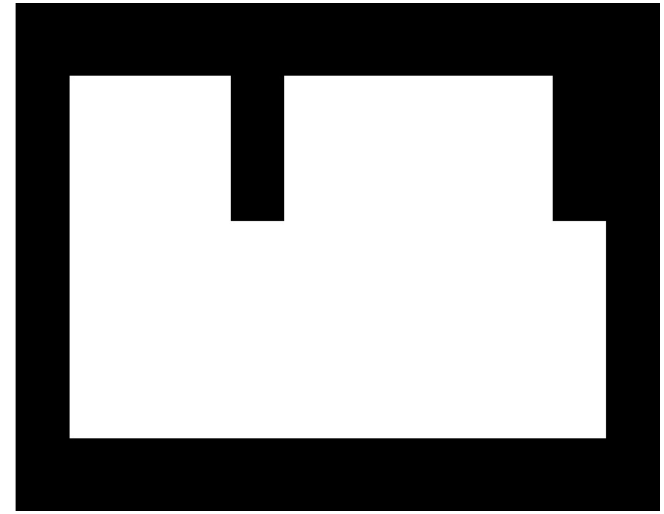
- Il contorno di A si ottiene come

$$\beta(A,B) = A \setminus (A \ominus B)$$

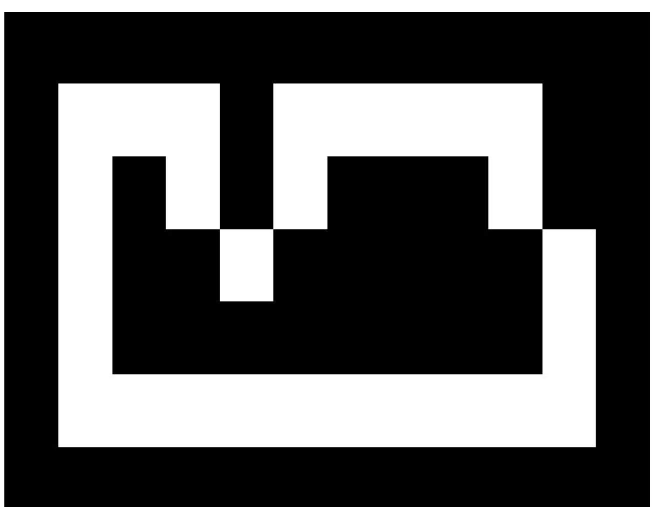
dove B è un elemento strutturale ad hoc, per es.

$$B_8 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \qquad B_4 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

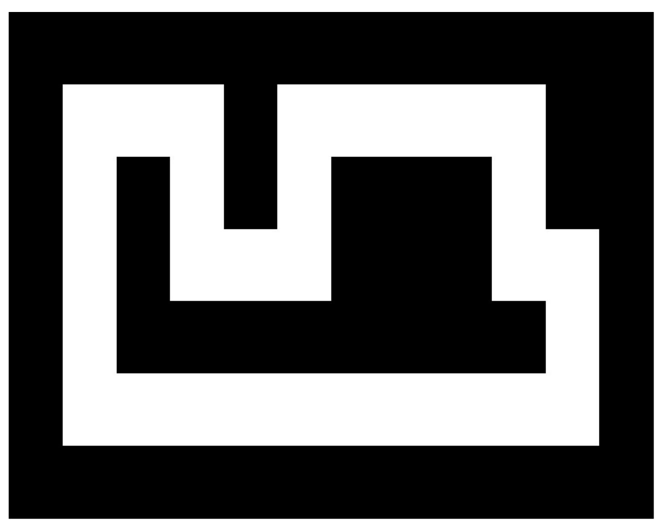
A



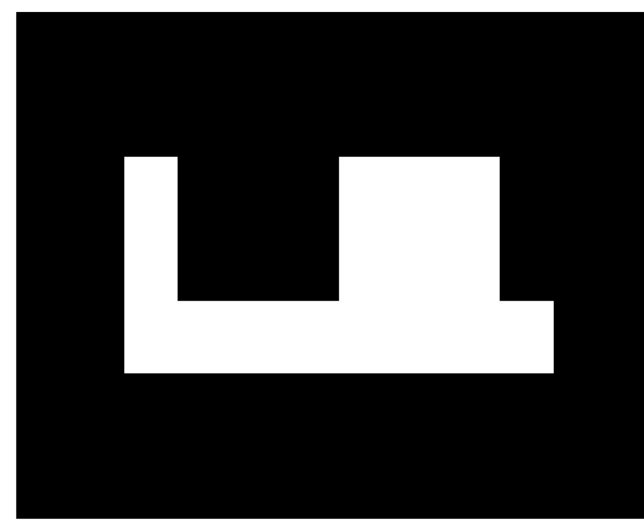
$\beta(A, B_4)$ contorno 4-connesso



$\beta(A, B_8)$ contorno 8-connesso



$A \ominus B_8$

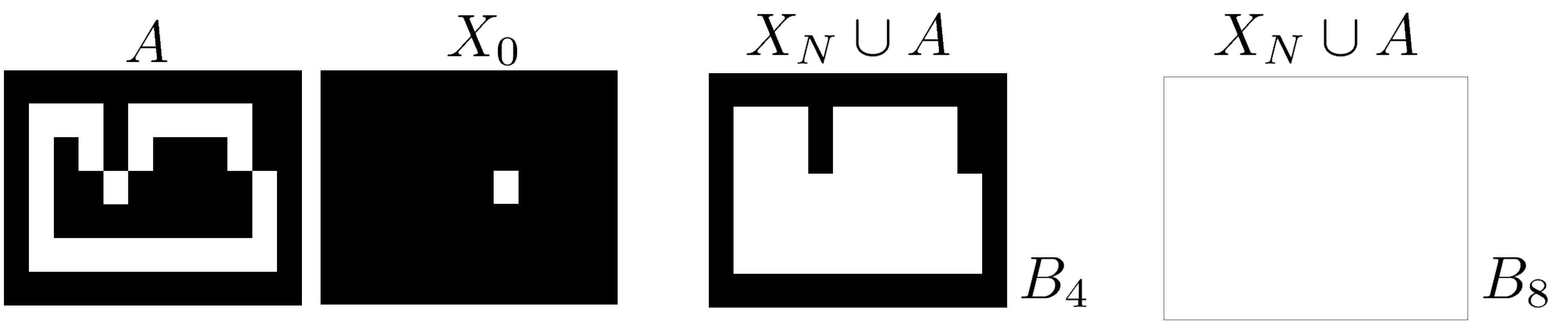


Riempimento di buchi

- Immaginiamo di avere un'immagine A con dei buchi (parti di immagine a 0 con contorno 4/8-connesso a 1.
- Sia X_0 un immagine di 0 con 1 in almeno un pixel in ciascun buco.
- Riempiamo i buchi iterando questo processo fino a stazionarietà.

$$X_k = (X_{k-1} \oplus B) \cap A^c, \quad k = 1 \ldots N, \quad X_N = X_{N+1}$$

  dove generalmente $B=B_8$ o B_4.
- L'immagine con i buchi riempiti è data da $A \cup X_N$
- Attenzione: se il contorno è 4-connesso e utilizziamo B_8, otteniamo un risultato diverso da quello desiderato.



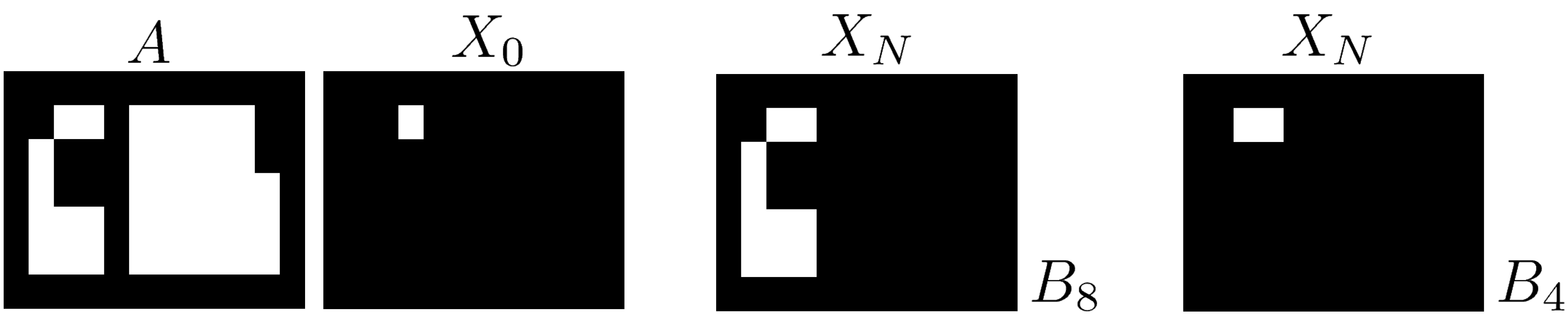
Estrazione componenti connesse

- Sia A un'immagine e X_0 un'immagine di 0 con un pixel a 1 in corrispondenze di un pixel acceso di A .
- Estraiamo una componente connessa iterando questo processo fino a stazionarietà.

$$X_k = (X_{k-1} \oplus B) \cap A, \quad k = 1 \dots N, \quad X_N = X_{N+1}$$

dove generalmente $B=B_8$ o B_4.

- Attenzione: usando B4 solo le 4-connessioni connettono le componenti.
- Notare che trovare una componente connessa è equivalente a trovare un buco nel complementare di A.



Inviluppo convesso

- Un **insieme** A è detto **convesso** se per ogni coppia di punti di A ogni punto lungo il segmento che li unisce appartiene ad A.
- L'**inviluppo convesso** C(A) di un insieme A è il più piccolo insieme convesso che contiene A.

$$X_k^i = (X_{k-1}^i \circledast B^i) \cup A, \quad i = 1 \dots 4,\ k = 1 \dots N_i$$

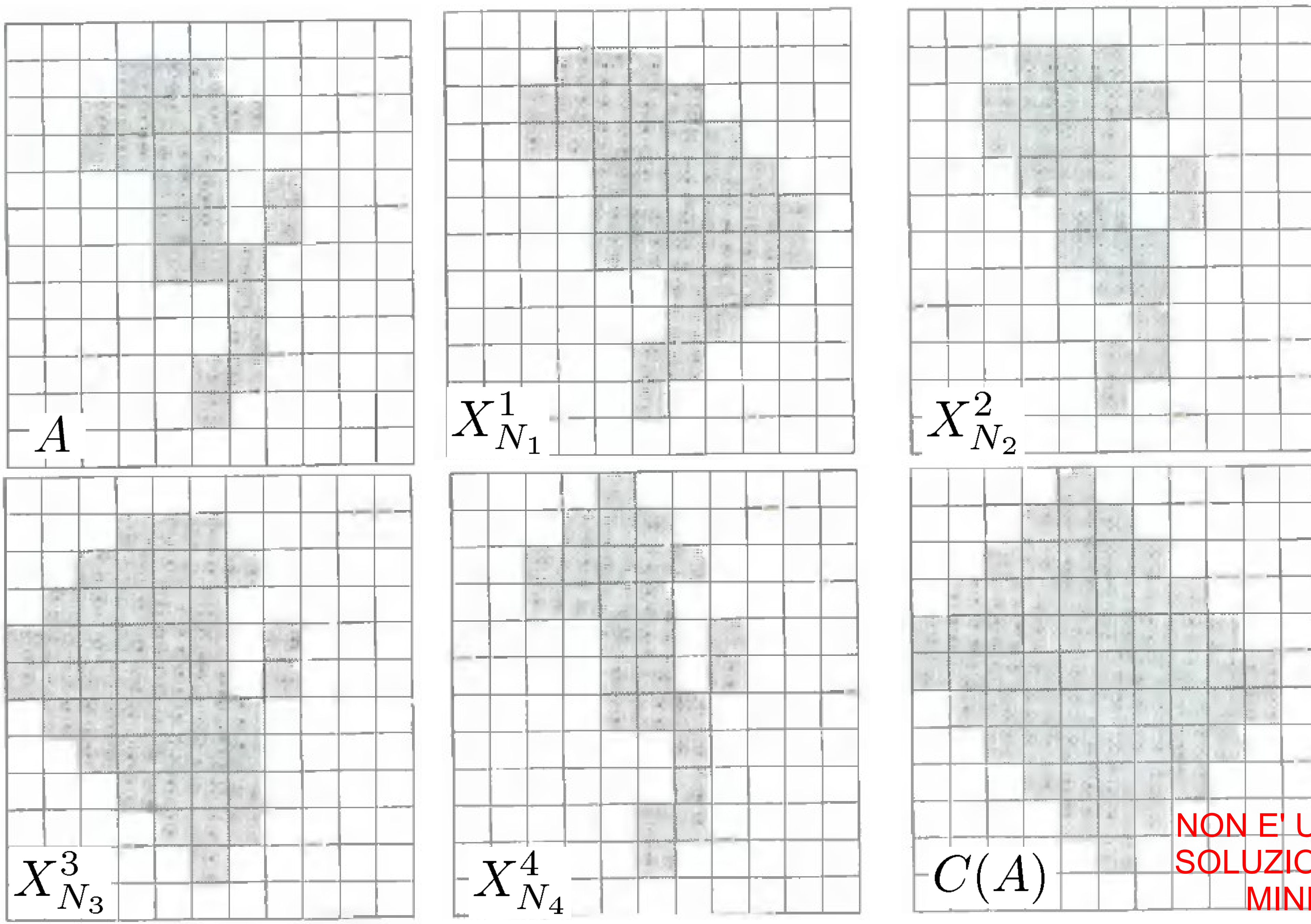
$$X_0^i = A \qquad X_{N_i}^i = X_{N_i+1}^i$$

$$C(A) = \bigcup_{i=1}^{4} X_N^i$$

$$B^1 = \begin{bmatrix} 1 & * & * \\ 1 & 0 & * \\ 1 & * & * \end{bmatrix} B^2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ * & 0 & * \\ * & * & * \end{bmatrix}$$

$$B^3 = \begin{bmatrix} * & * & 1 \\ * & 0 & 1 \\ * & * & 1 \end{bmatrix} B^4 = \begin{bmatrix} * & * & * \\ * & 0 & * \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Inviluppo convesso



NON E' UNA SOLUZIONE MINIMA

Assottigliamento

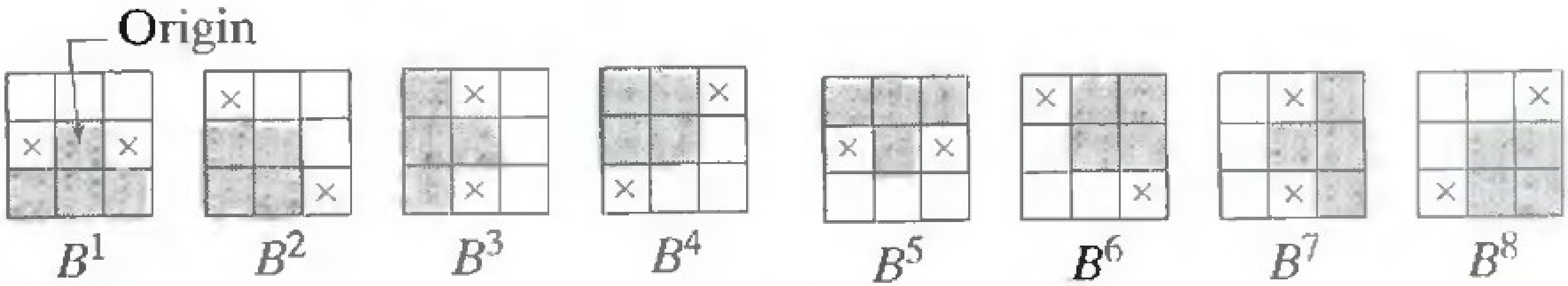
- Definiamo l'**assottigliamento** di A per mezzo di B come

$$A \otimes B = A \setminus (A \circledast B)$$

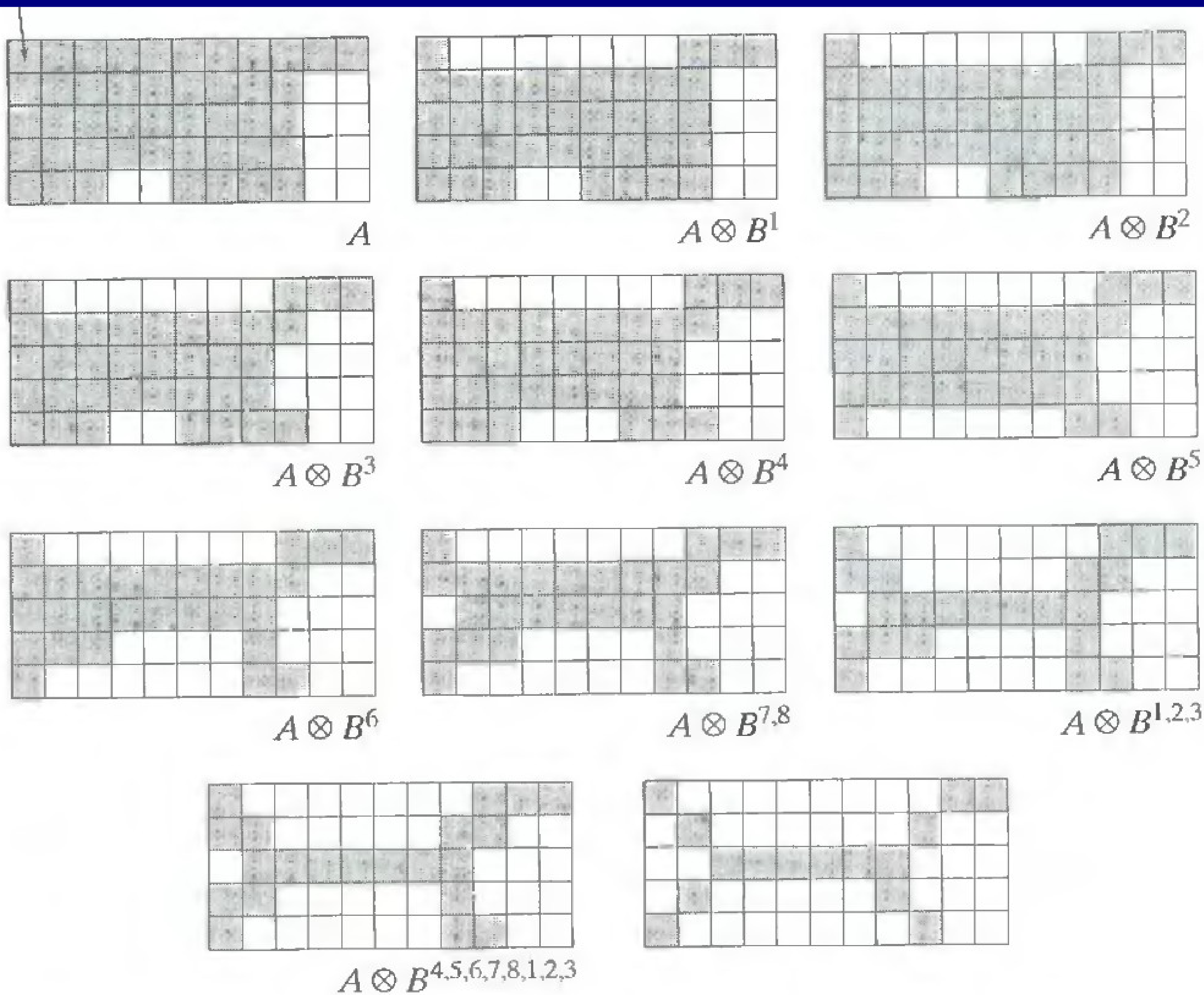
- Una versione più generale considera una sequenze di elementi strutturali

$$A \otimes \{B\} = (\ldots((A \otimes B^1) \otimes B^2) \ldots) \otimes B^n$$

dove $\{B\} = \{B^1, B^2, \ldots, B^n\}$



Assottigliamento



Inspessimento

- Definiamo l'**inspessimento** di A per mezzo di B come

$$A \odot B = (A^c \otimes B)^c$$

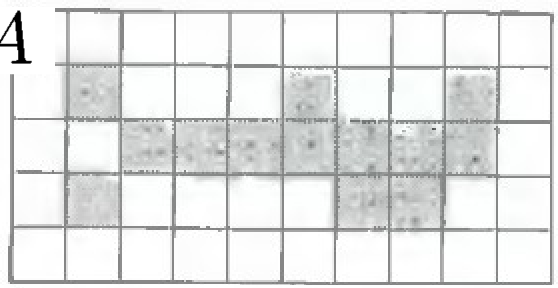
- Una versione più generale considera una sequenze di elementi strutturali

$$A \odot \{B\} = (\ldots((A \odot B^1) \odot B^2) \ldots) \odot B^n$$

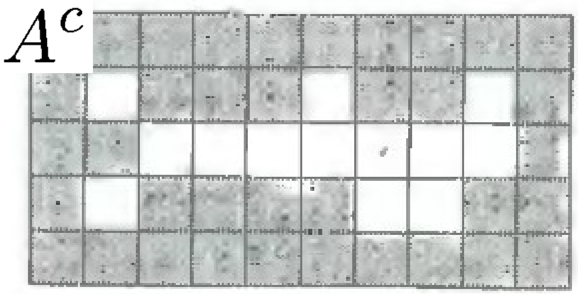
dove $\{B\} = \{B^1, B^2, \ldots, B^n\}$

- L'inspessimento può portare a punti disconnessi che possono essere rimossi con un post-processing.

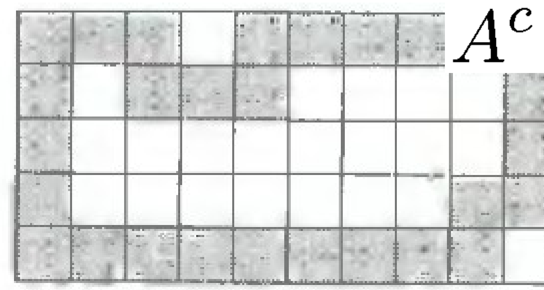
A



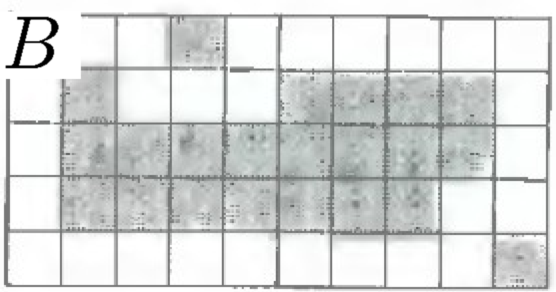
A^c



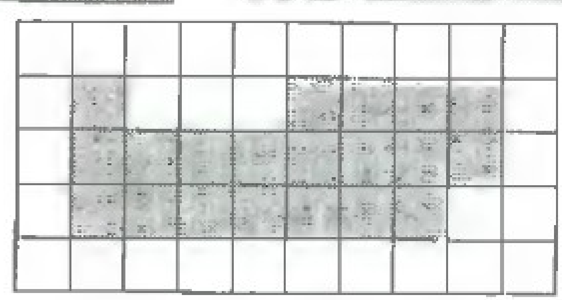
$A^c \otimes B$



$A \odot B$



rimozione punti isolati



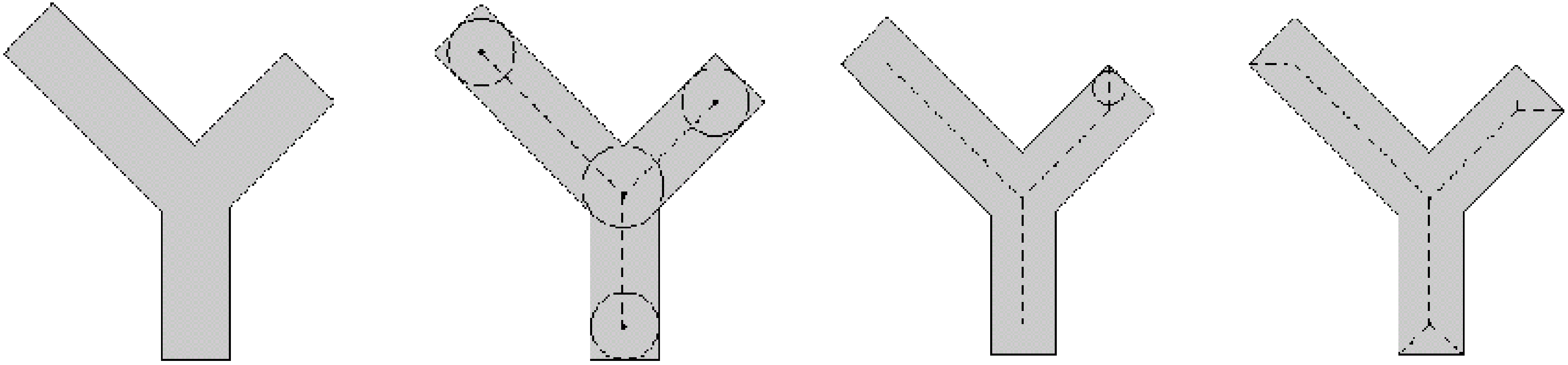
Scheletro

$$S(A) = \bigcup_{k=0}^{K} S_k(A)$$

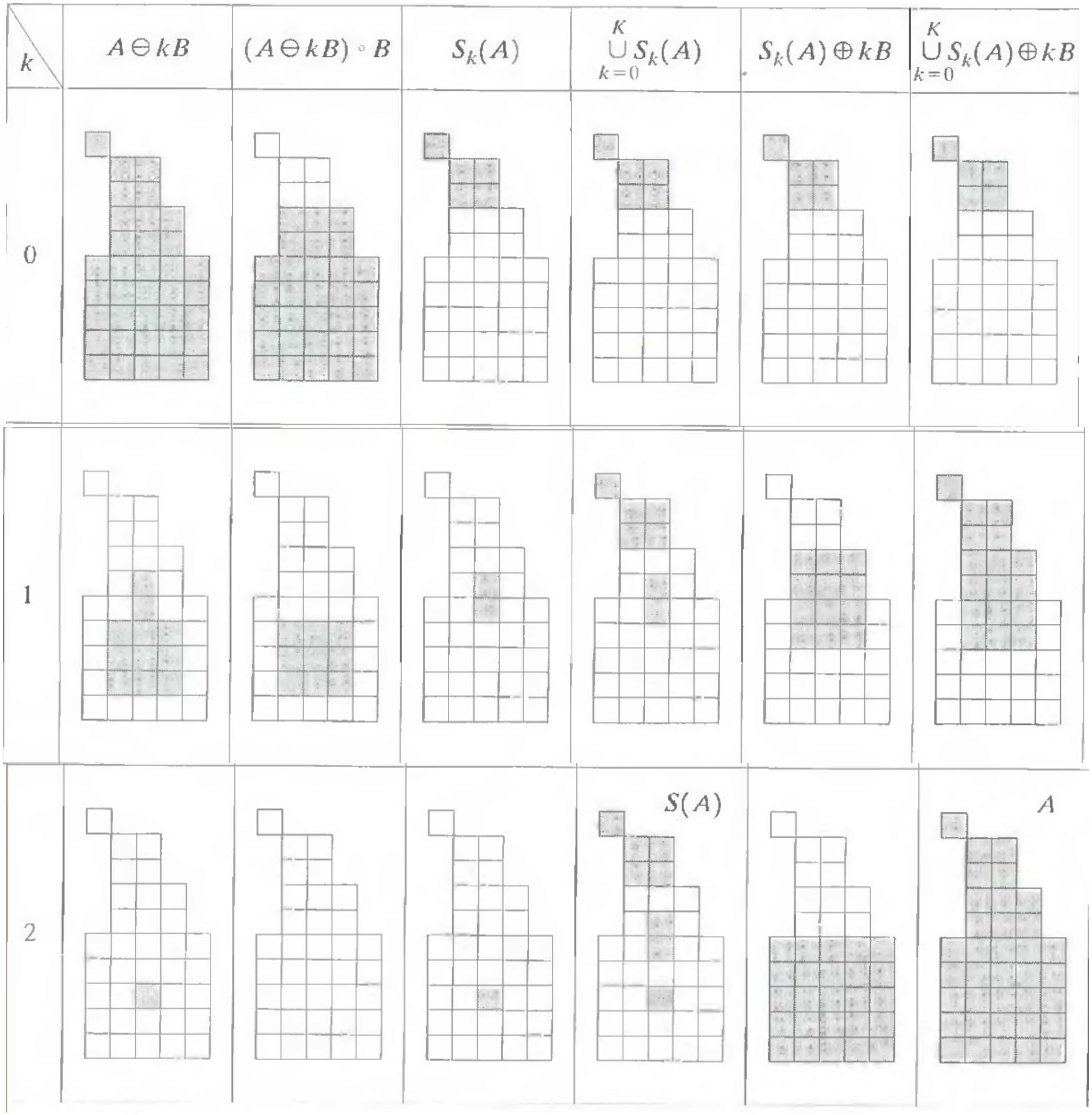
$$S_k(A) = (A \ominus kB) - (A \ominus kB) \circ B$$

$$A \ominus kB = (\ldots((A \ominus B) \ominus B) \ominus \ldots) \ominus B$$

$$K = \max\{k \, : \, A \ominus kB \neq \emptyset\}$$



Scheletro


k
$A \ominus kB$
$(A \ominus kB) \circ B$
$S_k(A)$
$\bigcup_{k=0}^{K} S_k(A)$
$S_k(A) \oplus kB$
$\bigcup_{k=0}^{K} S_k(A) \oplus kB$
0
1
2
$S(A)$
A

Filtri morfologici a scala di grigio

- Per estendere i filtri morfologici ad immagini a scala di grigio torniamo a trattare le immagini come funzioni

$$I : \mathbb{Z}^2 \rightarrow \mathbb{R} \text{ o } \mathbb{Z}$$

- Gli elementi strutturali diventano funzioni del tipo

$$b \ : \ D_b \rightarrow \mathbb{R} \text{ o } \mathbb{Z}$$

dove $D_b \subseteq Z^2$

- Il complementare dell'immagine I è dato da

$$I^c(x, y) = K - I(x, y)$$

- La riflessione dell'elemento strutturale b è data da

$$\hat{b}(x, y) = b(-x, -y) \qquad D_{\hat{b}} = \{(-x, -y) \ : \ (x, y) \in D_b\}$$

- Notare che il caso binario è equivalente a considerare I con codominio {0,1} e b con codominio {0}.

Erosione e dilatazione

- L'**erosione** di un immagine I per mezzo di un elemento strutturale b diventa

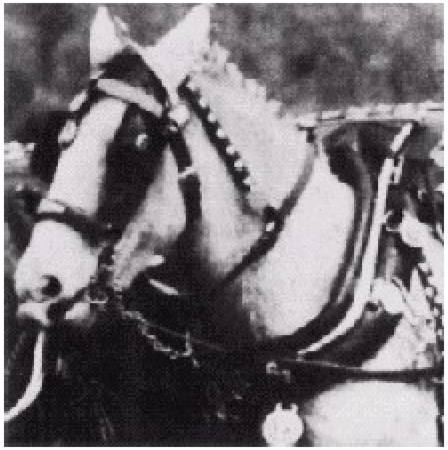
$$[I \ominus b](x,y) = \min_{(s,t)\in D_b} \{f(x+s, y+t) - b(s,t)\}$$

- In modo simile la **dilatazione** diventa

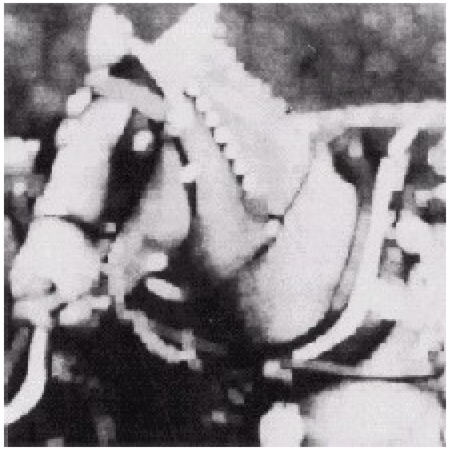
$$[I \oplus b](x,y) = \max_{(s,t)\in D_b} \{f(x-s, y-t) + b(s,t)\}$$

- La dualità, come nel caso binario, è data da $I \ominus b = (I^c \oplus \hat{b})^c$

I

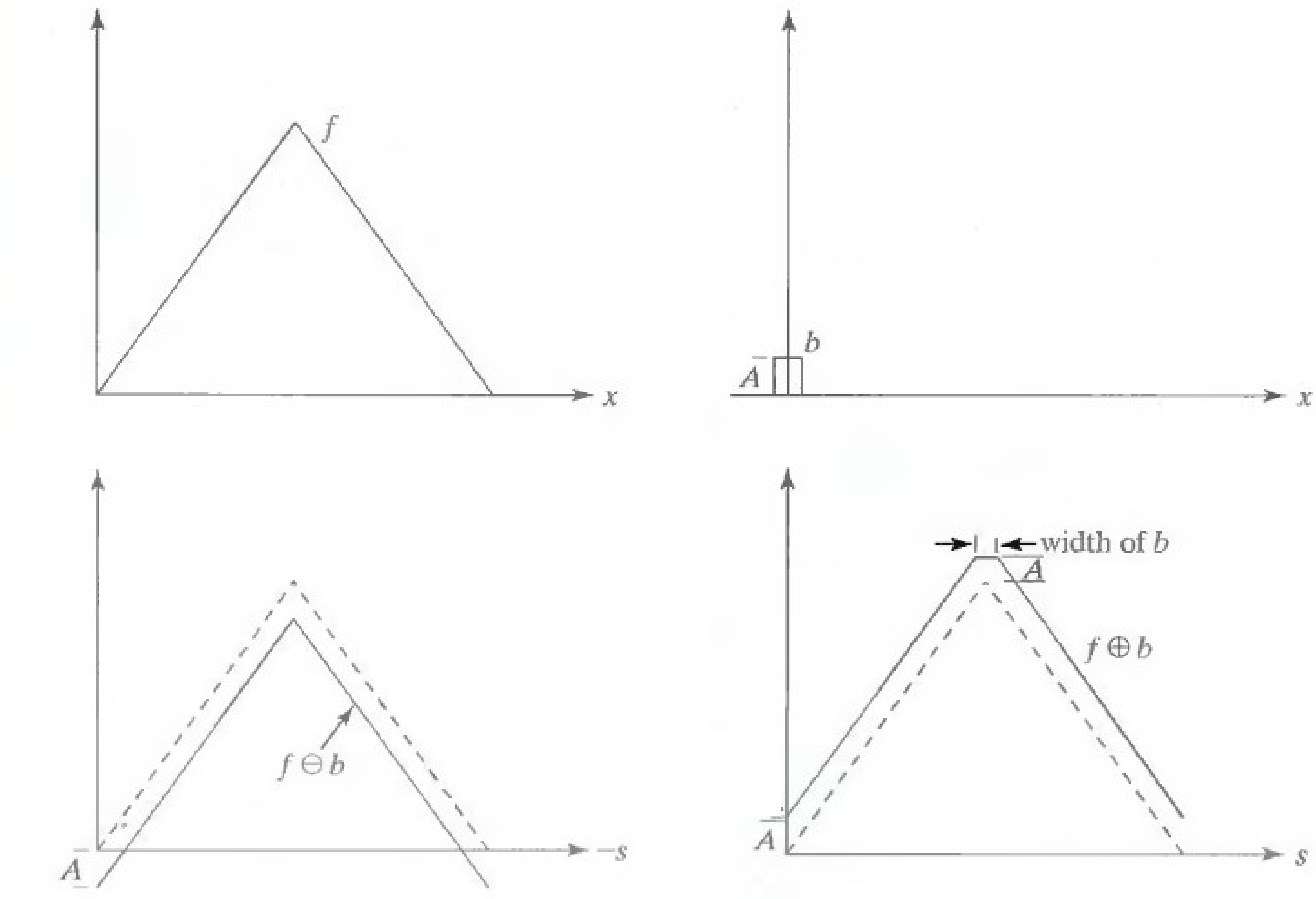


$I \oplus b$



$I \ominus b$

Erosione e dilatazione



Apertura e Chiusura

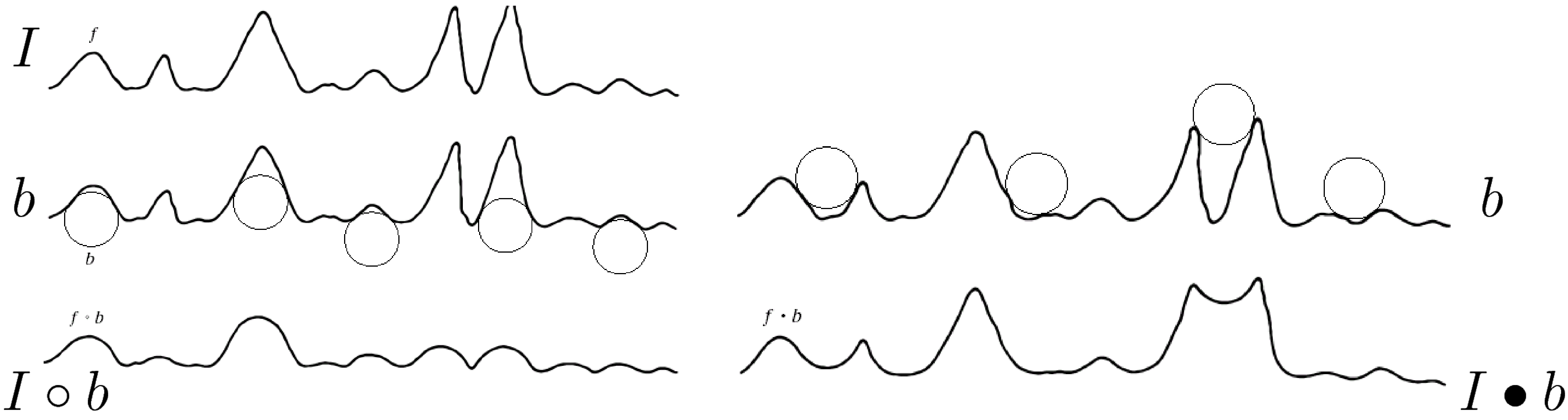
- L'**apertura** di I per mezzo di b rimane

$$I \circ b = (I \ominus b) \oplus b$$

- e in modo simile la **chiusura** rimane

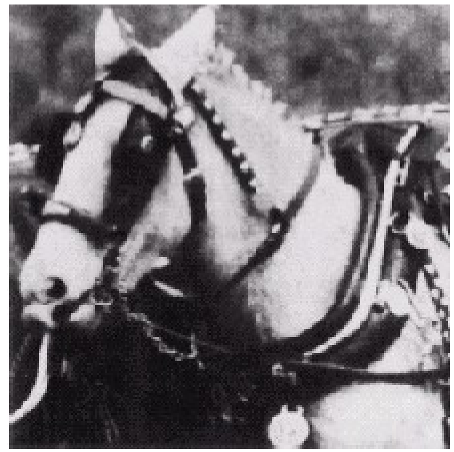
$$I \bullet b = (I \oplus b) \ominus b$$

- La dualità, come nel caso binario, è data da $I \bullet b = (I^c \circ \hat{b})^c$

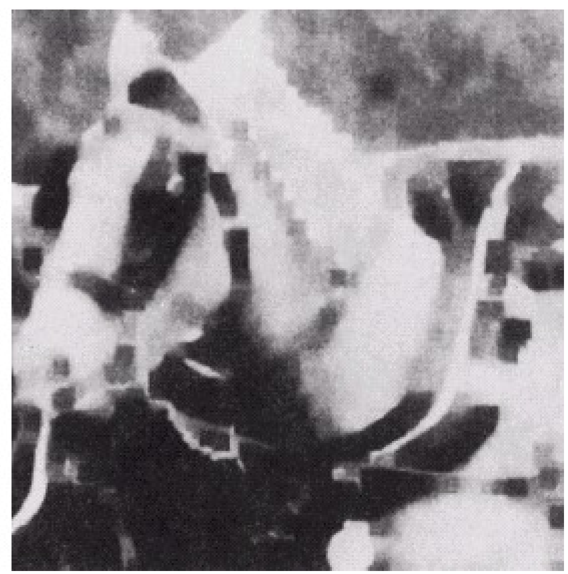


Apertura e Chiusura

I



$I \circ b$

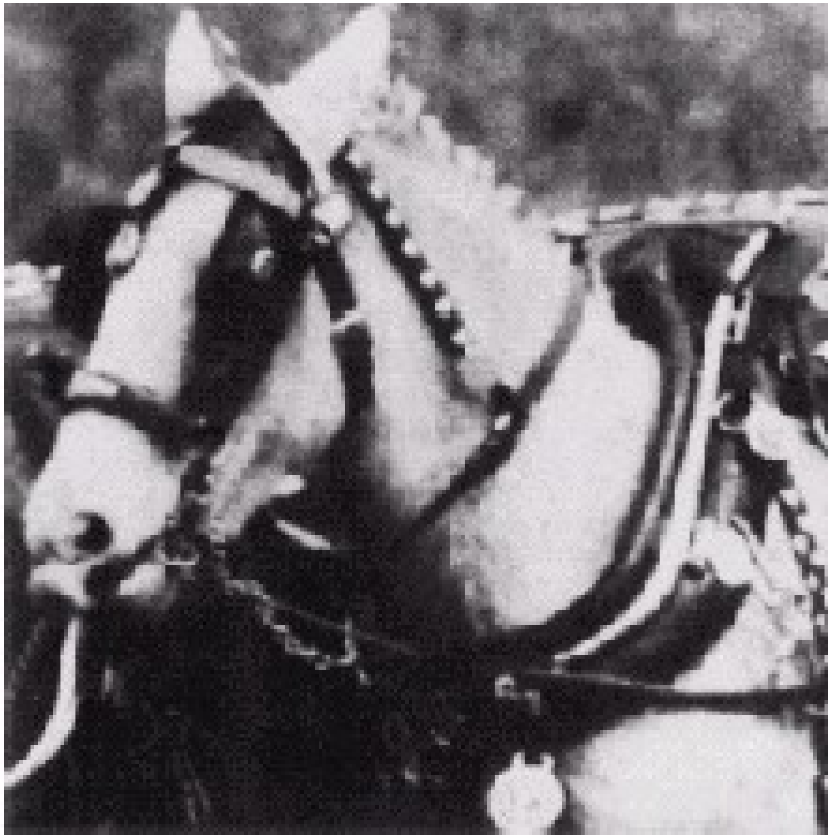


$I \bullet b$

Smoothing morfologico

- Un'apertura seguita da una chiusura può essere utilizzata per ottenere fare lo smmothing di un'immagine:

$$\text{smooth}(I) = (I \circ b) \bullet b$$



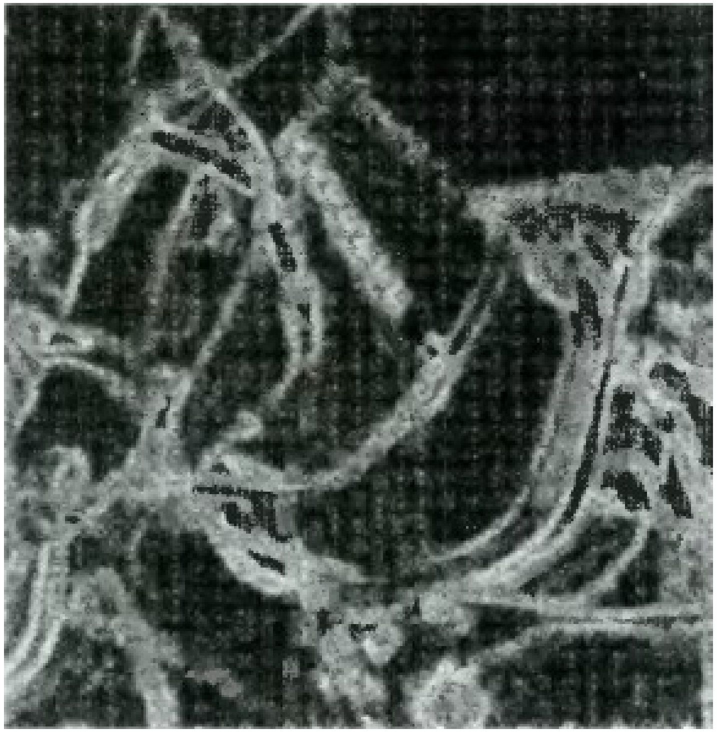
Gradiente morfologico

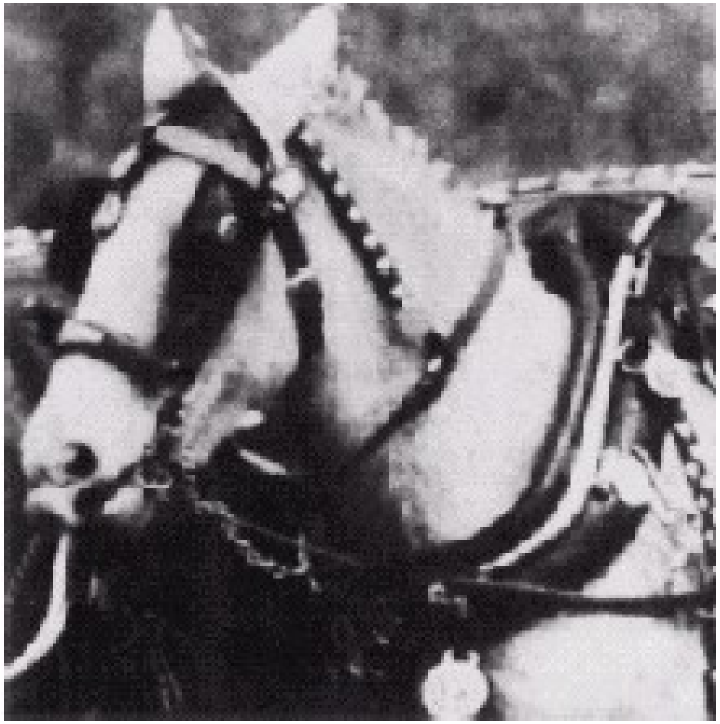
- La dilatazione e l'erosione possono essere utilizzate per ottenere il gradiente morfologico di un immagine:

$$g(I) = (I \oplus b) - (I \ominus b)$$

inspessisce le regioni

assottiglia le regioni





Trasformazione Top-hat e Bottom-hat

- La **trasformazione top-hat** è definita come

$$T_{\text{hat}}(I) = I - (I \circ b)$$

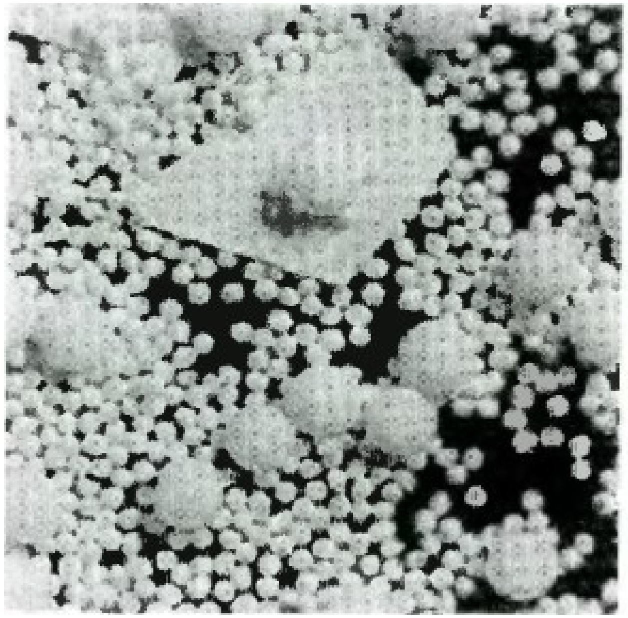
- La trasformazione **bottom-hat** è definita come

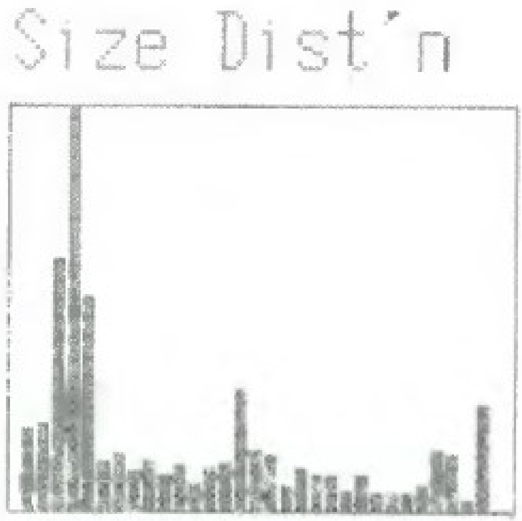
$$B_{\text{hat}}(I) = (I \bullet b) - I$$

- Servono per selezionare oggetti da un'immagine utilizzando un elemento strutturale che non corrisponde morfologicamente all'oggetto da rimuovere.

Granulometria

- Problema di determinare la distribuzione delle dimensioni di particelle in un'immagine.
- Assumiamo particelle di forma regolare più chiari rispetto allo sfondo.
- L'idea è che l'apertura con un elemento strutturale (ES) di una certa dimensione avrà maggiori effetti nelle parti dell'immagine che contengono particelle di quelle dimensione.
- Dopo ogni apertura si calcola la somma delle intensità dei pixel. Questa decresce all'aumentare della dimensione dell'ES. La derivata di questa funzione ha dei picchi in corrispondenza delle distribuzioni predominanti.





Segmentazione di texture