

Università degli Studi di Venezia
Corso di Laurea in Informatica

Appunti per le lezioni di Calcolo

Prof. Flavio Sartoretto

2 marzo 2004

Indice

1	Presentazione	5
1.1	Note didattiche	5
1.1.1	Dai paradossi al teoremi	6
2	Concetti di base.	9
2.1	Numeri in virgola mobile	9
2.2	Il grafico della funzione inversa	10
3	Limiti di successioni e di funzioni	11
3.1	Ordini di convergenza	11
3.1.1	Esempi:	11
3.2	Un esercizio	12
4	Funzioni continue	13
4.1	Composizione di funzioni	13
4.2	Un problema	13
4.3	Discontinuità	14
5	Applicazioni delle derivate	15
5.1	Convessità	15
6	Studio di funzioni	17
6.1	Stima di un processo cognitivo	17
7	Equazioni differenziali	19
7.1	Un'equazione con piú soluzioni	19
A	Modelli di crescita	21
A.1	Introduzione	21
B	Costo computazionale	23
B.1	Introduzione	23

C	Moto di un giocattolo	25
C.1	Formulazione del problema	25
C.2	Procedimento risolutivo	25
C.3	Obiettivi	27
C.4	Esempio di risoluzione	27
D	Analisi della dinamica	31
D.1	Introduzione	31
D.2	Compiti	31
-	Bibliografia	31

Capitolo 1

Presentazione

F. Sartoretto
Calcolo

Testi adottati:

- M. BERTSCH, *Istituzioni di Matematica*, Bollati Boringhieri, Torino, 1994.
- S. ANTONIAZZI, G. PAVARIN, E C. ZANNIOL, *Esercizi di Matematica A*, Libreria Progetto, Padova, 2003.
- Questo fascicolo: F. SARTORETTO, *Appunti di Calcolo*. disponibile all' URL <http://www.dsi.unive.it/~sartoret/italian/didattica/Calcolo/Addenda/AppCalc.ps.gz>, 2004.

Prerequisiti: nozioni di algebra elementare, teoria degli insiemi, logica matematica. Conoscenze di base sulle funzioni trigonometriche ed esponenziali.

1.1 Note didattiche

L' Analisi Matematica (*Calculus*, nelle scuole inglesi) è essenzialmente un linguaggio simbolico e come tale viene divulgata. Il metodo di insegnamento è assolutamente anti storico: per motivi di tempo e praticità non si fa menzione al sofferto sviluppo di questa materia. Si presentano gli attuali risultati come unici e inarrivabili prodotti di questa disciplina delle idee, di natura neo-platonica.

Lo studente non capisce il perché di tante definizioni e sottigliezze, ma viene invitato a credere nei risultati e applicarli. Qualche nota aiuterà a capire meglio quali complesse vicende abbia subito una disciplina che solo da pochi secoli ha assunto una forma abbastanza compiuta e ha permesso di fare notevoli passi avanti nella comprensione del mondo. Chi vuole approfondire l'argomento, può ad esempio consultare [Odi01], dal quale ho tratto queste brevissime note, e anche [Boy80] per una trattazione storica.

1.1.1 Dai paradossi al teoremi

La comprensione delle espressioni algebriche, oggi patrimonio dei corsi di matematica delle scuole medie, non è stata semplice quanto si presuppone in quei corsi. Tre capitoli successivi dell' *Ars Magna* di Gerolamo Cardano (1545) sono dedicati alle soluzioni dei tre “diversi” tipi di equazioni $x^3 + mx = n$, $x^3 = mx + n$, $x^3 + n = mx$, con i coefficienti m e n sempre positivi. Oggi questa proliferazione di equazioni sembra assurda!

Il concetto di infinito ha creato sempre problemi. Dal fatto che $1 < 1/2 < 1/4 < 1/8 < \dots$ sembrava di poter dedurre che $1/\infty = 0$, che porta a $1 = \infty \cdot 0$. Ma $1 \cdot 0 = 0$, $2 \cdot 0 = 0$, $4 \cdot 0 = 0$, $8 \cdot 0 = 0$, ... quindi è altrettanto naturale pensare che $0 \cdot \infty = 0$! D'altronde, se supponiamo che ∞ sia un numero, diciamo un *numero più grande di qualsiasi altro*, quanto fa $\infty + 1$? Il risultato è un numero più grande di qualsiasi altro numero, quindi $\infty + 1 = \infty$! Con buona pace del fatto che $x + 1 > x$ per *ogni* numero x ! La moderna conclusione è semplice: ∞ non è un numero. Tutt'al più è un simbolo, che si rivela utile per compiere ragionamenti, a patto di stare attenti e dismetterlo appena possibile.

Anche il concetto di derivata si sviluppa attraverso un processo lungo e sofferto. Pierre de Fermat introdusse un metodo per trovare tangenti e risolvere problemi di massimo e minimo, che nel giro di due secoli si sarebbe poi pienamente sviluppato nel calcolo differenziale. Il metodo si basava sull'uso di quantità evanescenti dette *infinitesimi*, che si supponevano essere non nulle ma piccole a piacere. Cioè maggiori di zero ma minori di $1/n$, per ogni n . Un esempio dell'uso paradossale che veniva fatto degli infinitesimi è illustrato dal modo in cui Fermat calcolò la derivata di x^2 , come rapporto incrementale:

$$\frac{dx^2}{dx} = \frac{(x + dx)^2 - x^2}{dx} = \frac{2xdx + (dx)^2}{dx} = 2x + dx = 2x.$$

La quantità infinitesima dx , che deve essere diversa da zero per poter scrivere i rapporti, viene posta uguale a zero per ottenere il risultato finale: assurdo! La conclusione, comunque, è corretta: un esempio di ragionamento errato

che porta ad un risultato corretto; una situazione tanto condannata dall'insegnante, quanto sovente poco capita dall'allievo. Vedremo in questo corso qual è la soluzione oggi data al problema.

L'annoso problema delle somme infinite può essere ricondotto ad antichi paradossi, come quello di "Achille e la tartaruga", proposto da Zenone di Elea nel V secolo avanti Cristo [Odi01]. Il paradosso si può formulare così: Achille e la tartaruga fanno una gara di corsa. Achille concede un buon tratto di vantaggio alla tartaruga. Per raggiungere la tartaruga, Achille deve prima raggiungere il punto A da dove quest'ultima parte. Nel tempo in cui Achille raggiunge A, la tartaruga si muove però un po' più avanti, diciamo nel punto B. Nel tempo in cui Achille raggiunge B, la tartaruga si muove in C... e così via. Achille si avvicina sempre di più alla tartaruga, senza poter mai raggiungerla! La moderna soluzione al paradosso si basa sulla Teoria delle Serie (somme "infinite"). Buona parte dello sviluppo dell'analisi consistette nel cercare di determinare condizioni sempre più restrittive e precise per la convergenza di queste somme. Grazie all'approccio di Newton al calcolo infinitesimale, che consisteva nell'espandere funzioni in serie, e poi differenziarle o integrarle termine a termine, la nozione di somma infinita cessò poco a poco di essere considerata paradossale, e gradualmente si accettò l'idea che potesse corrispondere un valore finito. Non senza discussioni, però. Le più accese delle quali furono generate dalla serie alternata

$$1 - 1 + 1 - 1 + 1 - \dots$$

Ridisponendo le parentesi, essa provoca infatti l'indisponente paradosso

$$0 = (1 - 1) + (1 - 1) + \dots = 1 + (-1 + 1) + (-1 + 1) + \dots = 1.$$

Guido Grandi (1671-1742) accettò di buon grado il risultato e sostenne, nel libro *Quadratura circoli et hyperbolae* (1703), che questa era una spiegazione del modo in cui Dio aveva creato il mondo dal nulla.

Dalla formula delle progressioni geometriche

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots$$

ponendo $x = -1$ ottenne poi

$$\frac{1}{2} = 1 - 1 + 1 - 1 + \dots$$

Leibniz sostenne che questo era effettivamente il vero valore della serie, sulla base del fatto che le *somme parziali* alternano, il valore più probabile è

dunque la loro media aritmetica. Un ragionamento che, giustamente, egli ammise essere piú metafisico che matematico. Aggiungendo, però, che la matematica era comunque piú metafisica di quanto si ammettesse. Leonhard Euler concordò sul fatto che $1/2$ fosse il vero valore della serie, con la diversa motivazione che il ragionamento di Grandi riduceva la serie infinita a una formula finita, e che questo era il modo corretto di dar senso alle serie infinite.

Le soluzioni moderne a questi problemi danno luogo ad un sistema di affermazioni consistenti, cioè che non si contraddicono, e questo è il massimo che si può dire. D'altronde, che il concetto di *numero*, basilare per la matematica, corrisponda a qualche ente reale, è un'idea ormai abbandonata. Quello che rende la Matematica (e l' Analisi Matematica, in particolare) così feconda è il fatto che, a qualunque cosa essa si riferisca, ci permette tramite la Modellistica Matematica di padroneggiare il mondo attorno a noi, in una maniera impensabile fino a pochi decenni fa.

Capitolo 2

Concetti di base.

2.1 Numeri in virgola mobile

Un numero in *virgola mobile, normalizzato* (*normalized floating point number*) [QS02], $x \neq 0$, a n cifre, con esponente e , $e_{min} \leq e \leq e_{max}$, ha la forma

$$x = \pm a_1.a_2 \dots a_n E e = \pm a_1.a_2 \dots a_n \cdot 10^e, \quad a_1 \neq 0. \quad (2.1)$$

Alcuni testi riportano la forma alternativa

$$x = \pm 0.a_1 a_2 \dots a_n E e = \pm 0.a_1 \dots a_n \cdot 10^e, \quad a_1 \neq 0. \quad (2.2)$$

Useremo prevalentemente la prima forma.

Esempi con $n = 3$, $e_{min} = -99 \leq e \leq 99 = e_{max}$:

$$-1.15E+4 = -1.15E4 = -1.15e4 = -1.15 \times 10^4 = -11500,$$

$$2.10E02 = 2.10E+2 = 2.10e2 = 2.1 \times 10^2 = 210,$$

$$3.25E-1 = 3.25 \times 10^{-1} = 0.325,$$

$$-4.12E-6 = -4.12 \times 10^{-6} = -0.00000412.$$

Troncamento a k cifre:

$$tr_k(x) = tr_k(\pm a_1.a_2 \dots a_k \dots a_n \cdot 10^e) = \pm a_1.a_2 \dots a_k \cdot 10^e. \quad (2.3)$$

Arrotondamento a k cifre:

$$fl_k(x) = rd_k(x) = fl_k(\pm a_1.a_2 \dots a_k \dots a_n \cdot 10^e) = \pm tr_k(a_1.a_2 \dots a_k \dots a_n + (1/2)10^{-k+1}) \cdot 10^e. \quad (2.4)$$

Arrotondamento a 3 cifre:

$$fl_3(1.135) = 1.14E+0, \quad fl_3(12.13) = 1.21E+1, \quad fl_3(0.001354) = 1.35E-3.$$

$$\pi = 3.1415927\dots; \quad fl_3(\pi) = 3.14E+0$$

Arrotondamento a k cifre, in base 10:

0-4 \rightarrow riporto 0, 5-9 \rightarrow riporto 1;

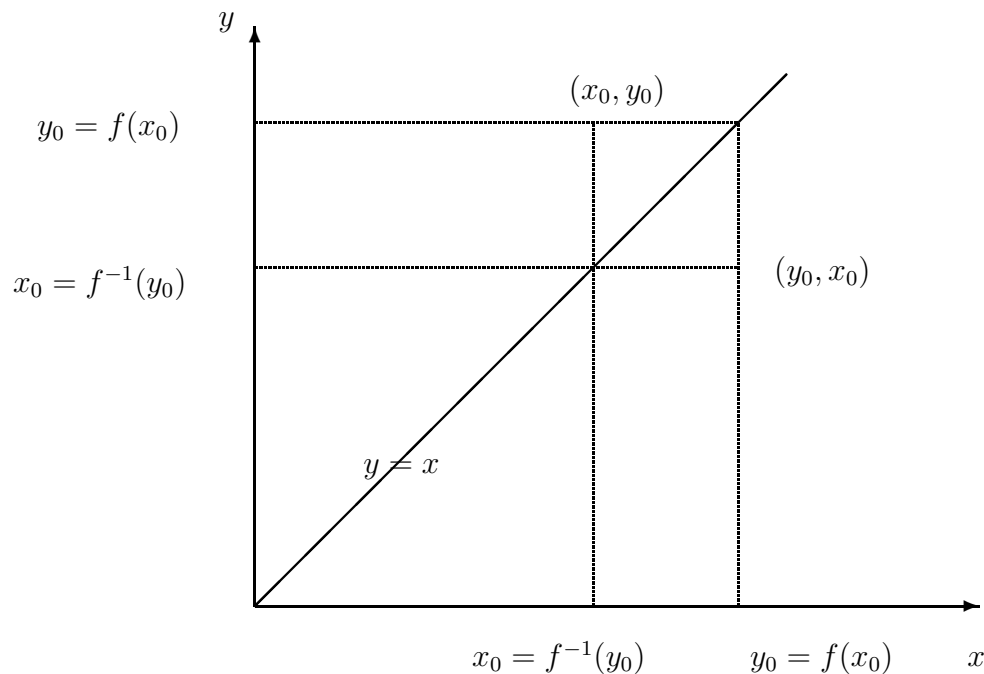


Figura 2.1: Grafico della funzione inversa.

2.2 Il grafico della funzione inversa

Dato il grafico di una funzione f , $G(f)$, come si può disegnare quello della sua inversa, $G(f^{-1})$? La figura 2.1 lo spiega: un punto (x_0, y_0) appartiene a $G(f)$ se e solo se (y_0, x_0) , che è il punto simmetrico rispetto alla retta $y = x$, appartiene a $G(f^{-1})$.

Capitolo 3

Limiti di successioni e di funzioni

3.1 Ordini di convergenza

- $f(x) = O(g(x))$ per $x \rightarrow a$ (si legge $f(x)$ *é di ordine “O-grande” di $g(x)$ per $x \rightarrow a$*), significa che la funzione

$$\left| \frac{f(x)}{g(x)} \right|$$

é limitata per $x \rightarrow a$, ossia esiste un intorno I_a di a ed esiste $M \in \mathfrak{R}^+$ t.c. $(\forall x \in I_a) |f(x)/g(x)| \leq M$.

- $f(x) = o(g(x))$ per $x \rightarrow a$ (si legge $f(x)$ *é di ordine “o-piccolo” di $g(x)$ per $x \rightarrow a$*), significa che

$$\lim_{x \rightarrow a} \left| \frac{f(x)}{g(x)} \right| = 0.$$

La definizione “o-piccolo” viene chiamata anche *notazione di Landau*.

3.1.1 Esempi:

- $\sin(x) = O(1)$ per $x \rightarrow \infty$. Infatti $|\sin(x)/1| \leq 1$. Notare che *non esiste* il $\lim_{x \rightarrow \infty} \sin(x)/1$.
- $2(n+1)n = O(n^2)$ per $n \rightarrow +\infty$. Infatti $\lim_{n \rightarrow +\infty} |2(n+1)n/n^2| = 2$.
- $n(n+1) = o(n^k)$, $k > 2$, per $n \rightarrow +\infty$. Infatti se $k > 2$ risulta $\lim_{n \rightarrow +\infty} |(n+1)n/n^k| = 0$.

3.2 Un esercizio

Ecco come si può trattare una potenza iterata.

Calcolare

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(x \sin \frac{1}{x}\right)^{x^2}.$$

Risoluzione. Intanto

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(x \sin \frac{1}{x}\right)^{x^2} = \lim_{y \rightarrow 0^+} \left(\frac{\sin y}{y}\right)^{1/y^2}.$$

Quando $y \rightarrow 0$,

$$\frac{\sin y}{y} \rightarrow 1, \quad \ln \frac{\sin y}{y} \rightarrow 0,$$

Usando lo sviluppo di Mac Laurin, si ottiene

$$\ln \frac{\sin y}{y} = -\frac{y^2}{6} + o(y^2).$$

Quindi:

$$\lim_{y \rightarrow 0^+} \ln \left(\frac{\sin y}{y}\right)^{1/y^2} = \lim_{y \rightarrow 0^+} \frac{1}{y^2} \ln \left(\frac{\sin y}{y}\right) = \lim_{y \rightarrow 0^+} \frac{1}{y^2} \left(-\frac{y^2}{6} + o(y^2)\right) = -1/6.$$

Perciò

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(x \sin \frac{1}{x}\right)^{x^2} = \exp(-1/6).$$

Capitolo 4

Funzioni continue

4.1 Composizione di funzioni

Proposizione 4.1.1 *Se la funzione $f \circ g$ è continua nel punto \tilde{x} , non necessariamente f e g sono continue in \tilde{x} .*

Esercizio 4.1.1 Sia $f \circ g = 1$. Essa è continua in $\tilde{x} = 0$, ma

$$f = x^2, \quad g = \begin{cases} 1 & \text{se } x \geq 0, \\ -1 & \text{altrimenti,} \end{cases}$$

non sono ambedue continue in 0.

Piú in generale, ogni funzione $h(x)$ può essere pensata come composizione $h = f \circ g$ di funzioni f e g che hanno le piú diverse caratteristiche di regolarità.

4.2 Un problema

Supponiamo che alle 8:00 di un certo giorno un alpinista parta dalla base di una montagna a 0 metri e alle 17:00 arrivi in cima, a 1000 metri. Il giorno dopo alle 8:00 riparte e *percorrendo la stessa strada*, alle 17:00 arriva alla base.

Esiste un istante τ del secondo giorno in cui l'alpinista si trova nello stesso punto P in cui si trovava nello stesso istante τ del giorno precedente?

Supponendo che il percorso sia una funzione continua $p(t)$ del tempo, usando le proprietà delle funzioni continue, si può giungere ad una conclusione positiva. Si veda la figura 4.1. Visto che i cammini sono uguali, salita, $s(t)$, e discesa, $d(t)$, possono essere rappresentate come funzioni del tempo, di una sola variabile spaziale. La differenza tra la salita e la discesa è una

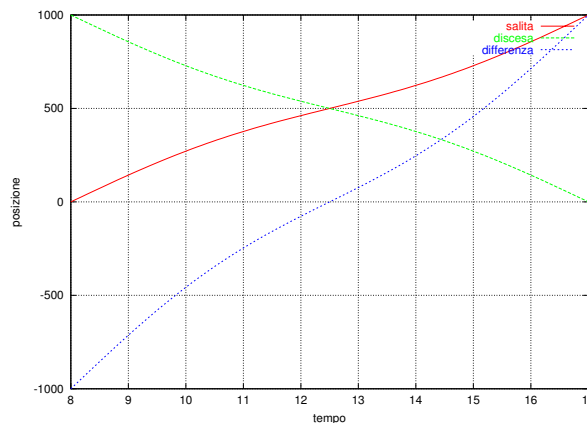


Figura 4.1: I percorsi.

funzione continua, negativa ad un estremo e positiva nell'altro. Quindi per il teorema dello zero, esiste un valore τ in cui $s(\tau) - d(\tau) = 0$, ossia $s(\tau) = d(\tau)$. L'istante τ è l'istante cercato.

4.3 Discontinuità

Definizione 4.3.1 Se una funzione f è discontinua nel punto \bar{x} , ma esistono e sono finiti i limiti

$$\lim_{x \rightarrow \bar{x}^+} f(x), \quad \lim_{x \rightarrow \bar{x}^-} f(x),$$

diciamo che f ha una discontinuità di *prima specie* in \bar{x} .

Definizione 4.3.2 Se una funzione f è discontinua nel punto \bar{x} , e non ha una discontinuità di prima specie in \bar{x} , allora diciamo che ha una discontinuità di *seconda specie* in \bar{x} .

Definizione 4.3.3 Se

$$\lim_{x \rightarrow \bar{x}^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow \bar{x}^-} f(x) = L,$$

ma $f(\bar{x}) \neq L$, diciamo che f ha una discontinuità di prima specie *eliminabile* in \bar{x} .

Capitolo 5

Applicazioni delle derivate

5.1 Convessità

Definizione 5.1.1 Una funzione $f(x) \in C^2$ è convessa nel punto \tilde{x} , se esiste un intorno I del punto \tilde{x} in cui il grafico di f sta *sempre* sopra la tangente $t(x)$ nel punto \tilde{x} .

Teorema 5.1.1 Una funzione è convessa nel punto \tilde{x} se e solo se $f''(\tilde{x}) > 0$.

Dimostrazione. $f''(\tilde{x}) > 0 \Leftrightarrow (\exists I, \tilde{x} \in I)(\forall x \in I)(f''(x) > 0)$. Per il teorema di Taylor allora $(\forall x \in I) (\exists \xi \in I) f(x) = f(\tilde{x}) + (x - \tilde{x})f'(\tilde{x}) + (1/2)(x - \tilde{x})^2 f''(\xi) = t(x) + (1/2)(x - \tilde{x})^2 f''(\xi) = t(x) + \Delta > t(x)$, sse $f''(\xi) > 0$.
QED

Capitolo 6

Studio di funzioni

6.1 Stima di un processo cognitivo

Uno studio qualitativo sul valore che le persone danno a guadagni o perdite, fornisce una stima analoga a quella proposta in figura 6.1, adattata da [PP94]. Essa riassume una visione pessimistica: all' aumentare dei guadagni ($x \rightarrow +\infty$), si raggiunge una saturazione (asintoto). Oltre un certo livello di guadagno, che dipende dalla singola persona, non si ha un aumento apprezzabile del grado di soddisfazione. Viceversa, non esiste un limite al livello di insoddisfazione connesso alle perdite. Piccole perdite comportano grande sconforto e all'aumentare della perdita ($x \rightarrow -\infty$), aumenta sempre l'insoddisfazione.

Esercizio: scrivere l'espressione di una funzione $f \in \mathcal{C}^1$ che ha l'andamento disegnato in figura 6.1. Tracciarne poi un grafico, ad esempio con gnuplot.

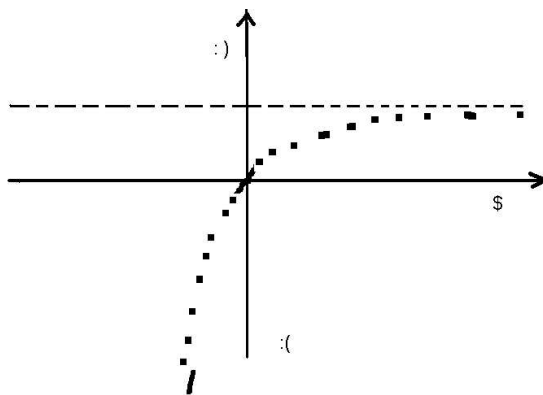


Figura 6.1: Valore attribuito a guadagni e perdite.

Capitolo 7

Equazioni differenziali

7.1 Un'equazione con piú soluzioni

Consideriamo l'equazione differenziale

$$y' = f(x, y) = 2\sqrt{|y|}. \quad (7.1)$$

Come funzione di x , $f(x, y)$ è continua in tutto \mathbb{R} . La condizione di Lipschitz

$$|f(x, y) - f(x, z)| = |2\sqrt{|y|} - 2\sqrt{|z|}| = 2|\sqrt{|y|} - \sqrt{|z|}| \leq K|y - z|,$$

non è verificata per alcun $K > 0$ in un intorno di 0, infatti se prendiamo $z = 0$, $\sqrt{|y|}/|y|$ è illimitata intorno a 0. Il teorema di unicità delle soluzioni non vale e infatti vediamo che la (7.1) ha piú di una soluzione.

Separando le variabili abbiamo:

$$\int \frac{dy}{2\sqrt{|y|}} = x + c,$$

Quando $y > 0$ si ricava $y = (x - k)^2$, da cui $y' = 2(x - k)$; quando $y < 0$, $y = -(x - h)^2$, $y' = -2(x - h)$.

Poichè in (7.1) si ha sempre $y' \geq 0$, deve essere $y = (x - k)^2$ quando $x \geq k$, $y = -(x - h)^2$ quando $x \leq h$.

Notando che $y = 0$ è soluzione di (7.1), sono soluzioni dell'equazione le funzioni

$$y_k^{(1)}(x) = \begin{cases} 0, & \text{se } x \leq k, \\ (x - k)^2, & \text{se } x > k \end{cases}, \quad (7.2)$$

$$y_h^{(2)}(x) = \begin{cases} -(x - h)^2, & \text{se } x \leq h, \\ 0, & \text{se } x > h \end{cases}. \quad (7.3)$$

Qualunque siano $x_1 \leq x_2$, sono soluzioni anche le funzioni:

$$y_{x_1, x_2}^{(3)}(x) = \begin{cases} -(x - x_1)^2, & \text{se } x \leq x_1, \\ 0, & \text{se } x_1 < x < x_2, \\ (x - x_2)^2, & \text{altrimenti.} \end{cases} \quad (7.4)$$

Il problema di Cauchy

$$y' = f(x, y) = 2\sqrt{|y|}, \quad y(0) = 0,$$

ammette quindi come soluzioni tutte le $y_k^{(1)}(x)$ per $k \geq 0$, tutte le $y_h^{(2)}(x)$ per $h \leq 0$, tutte le $y_{x_1, x_2}^{(3)}(x)$ per $x_1 \leq 0 \leq x_2$.

Il problema di Cauchy

$$y' = f(x, y) = 2\sqrt{|y|}, \quad y(1) = 4,$$

ammette quindi come soluzioni $y_1^{(1)}(x)$ e tutte le $y_{x_1, x_2}^{(3)}(x)$ per $x_1 \leq 1 \leq x_2$.

La equazione (7.1) non dà quindi luogo a problemi ben posti.

Appendice A

Modelli di crescita

A.1 Introduzione

I modelli di crescita assumono che la densità di una popolazione p sia proporzionale alla popolazione esistente, ossia

$$\frac{dp}{dt} = kp, \quad (\text{A.1})$$

dove k non dipende dalla concentrazione di nutrimento disponibile. Anche quando il nutrimento non scarseggia, la crescita in ambiente chiuso viene limitata dalle sostanze di rifiuto che gli esseri viventi producono. Questi prodotti inibiscono la crescita quando la densità raggiunge un valore massimo p_m . In questa situazione, la (A.1) si modifica nella

$$\frac{dp}{dt} = Kp(p_m - p). \quad (\text{A.2})$$

Prendiamo come esempio una popolazione di cellule in un liquido di coltura. Se la dimensione di p è $[p] = \text{cellule/litro}$, e il tempo è misurato in giorni, K ha dimensione $[K] = (\text{litri/cellule})/\text{giorno}$. Posto $p(0) = p_0$, la soluzione di (A.2) è:

$$p(t) = \frac{p_m}{1 + (p_m/p_0 - 1) \exp(-Kp_mt)}. \quad (\text{A.3})$$

Questa funzione viene chiamata *modello di crescita logistica*, o semplicemente *logistica*. Il suo andamento è esemplificato in figura A.1.

Come esempio di applicazione del modello logistico, consideriamo il problema di stimare l'evoluzione del mercato di un certo tipo di elaboratori. All'istante $t = 0$ sono stati venduti pochi elaboratori, diciamo $p_0 = 10$; è noto che $p_m = 63200$, $K = 2 \times 10^{-6}$. Poniamo $[p] = \text{numero elaboratori}$, misuriamo il tempo in settimane, allora $[K] = 1/(\text{elaboratori} \cdot \text{settimane})$. Calcolare e disegnare l'andamento di $p'(t)$.

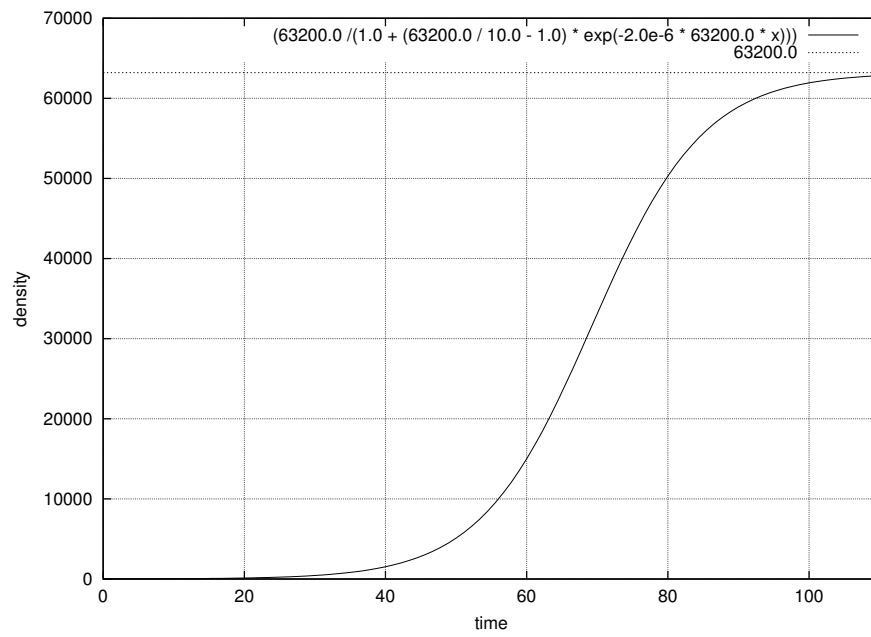


Figura A.1: Curva logistica.

Appendice B

Costo computazionale

B.1 Introduzione

Supponiamo di voler risolvere m sistemi $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}_i$, $i = 1, \dots, m$, che hanno la stessa matrice dei coefficienti, di ordine n .

Assumiamo che il costo di una singola operazione floating point sia unitario e facciamo alcune considerazioni sul calcolo del costo computazionale di un algoritmo [Sed88].

Risolvendo i sistemi con il metodo di Gauss [Gam94], bisogna triangolarizzare la matrice dei coefficienti e modificare opportunamente tutti i vettori dei termini noti \mathbf{b}_i . Infine, risolvere i sistemi con i metodi delle sostituzioni in avanti e all'indietro [Gam94]. Il costo della triangolarizzazione è

$$C_T(n) = \sum_{i=1}^n (n-1)n = \frac{n^3}{3} - \frac{n}{3}. \quad (\text{B.1})$$

Quello della trasformazione di un vettore termini noti è $C_B(n) = 2(n-1)$. Il costo delle sostituzioni in avanti è $n^2/2 - n/2 + 2$, uguale a quello delle sostituzioni all'indietro. Il costo delle sostituzioni è quindi

$$C_S(n) = 2m(n^2/2 - n/2 + 2). \quad (\text{B.2})$$

In totale, il costo è $C_G(n) = C_T(n) + C_S(n) + C_B(n) = (n^3/3 - n/3) + 2m(n^2/2 - n/2 + 2) + 2(n-1) = n^3/3 + mn^2 - (m+7/3)n + (4m-2) = O(n^3/3)$.

Notate che $C_G(n) = O(n^3/3)$ significa che $C_G(n) = n^3/3 + o(n^3)$, non che per n finito $C_G(n) = n^3/3$.

Esercizio B.1.1 Supponiamo di voler risolvere $m = 10$ sistemi. Assumiamo di sapere che $C_T^*(n) = O(n^3/3)$, $C_S^*(n) = O(mn^2)$. Calcolare il *punto di inversione* dei costi $C_T^*(n)$ e $C_S^*(n)$, ossia il valore n per il quale $C_T^*(n) > C_S^*(n)$.

Esercizio B.1.2 Nell'esercizio precedente, non ha molto senso usare una valutazione asintotica per trarre conclusioni relative a valori finiti di n . Calcolare il punto di inversione per C_T e C_S , usando le relazioni (B.1) e (B.2). Confrontare questo valore con quello ottenuto precedentemente.

Appendice C

Moto di un giocattolo

C.1 Formulazione del problema

Un' auto giocattolo si muove su un piano illimitato a velocità costante. Ad un assegnato istante l' asse anteriore inizia a girare a destra ad un tasso costante. L' asse posteriore dell' auto é fisso, quello anteriore può girare indefinitamente.

Determinare il cammino percorso dall' automobilina.

C.2 Procedimento risolutivo

Formalizzando la soluzione come in [AM88], sia (x, y) il centro dell' asse anteriore dell' auto e s la lunghezza del cammino percorso dal centro stesso (vedi figura C.1). La distanza l tra gli assi sia 1. Sia ξ l' angolo formato dall' auto con il centro degli assi di riferimento e sia θ l' angolo che l' asse anteriore forma con l' asse principale dell' auto.

Supponiamo che il guidatore inizi a girare il volante quando $x_0 = 0, y_0 = 0$ e che sia $\xi_0 = \theta_0 = 0$.

Allora il cammino dell' automobilina, ricordando che sia ds/dt che $d\theta/dt$ sono costanti, é governato dalle equazioni (vedi [AM88]):

$$\begin{cases} dx/ds = \cos(\xi + \theta) \\ dy/ds = \sin(\xi + \theta) \\ d\xi/ds = \sin(\theta) \\ d\theta/ds = k \end{cases} \quad (\text{C.1})$$

k rappresenta la velocità con cui il guidatore gira il volante. Il sistema di equazioni (C.1) assieme alle condizioni iniziali permette di calcolare la traiettoria dell' automobilina al variare di k .

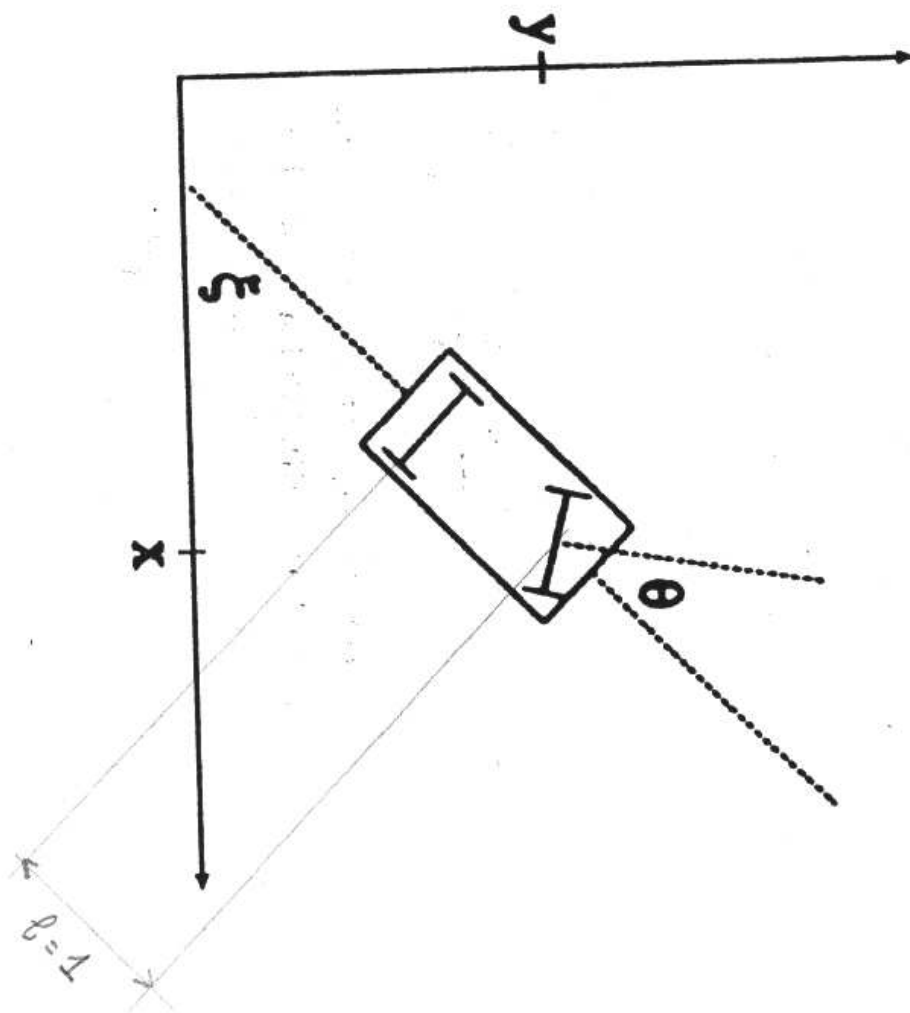


Figura C.1: Rappresentazione del problema.

C.3 Obiettivi

In figura C.2 sono riprodotte traiettorie per alcuni valori di k . L'obiettivo é quello di ricalcolare queste traiettorie integrando le equazioni (C.1).

C.4 Esempio di risoluzione

Risolvendo analiticamente le ultime due equazioni e sostituendo i risultati nelle prime due, il sistema si riduce a:

$$\begin{cases} dx/ds = \cos(\alpha(s)) \\ dy/ds = \sin(\alpha(s)) \end{cases}, \quad \alpha(s) = \frac{1}{k}(1 - \cos(ks)) + ks. \quad (\text{C.2})$$

Quindi

$$x(s) - x(0) = \int_0^s \cos(\alpha(t)) dt, \quad (\text{C.3})$$

e analogamente si risolve y . Si possono approssimare gli integrali, prendendo il polinomio lineare a tratti che interpola la funzione integranda. Usiamo una integrazione adattiva: data una partizione P di $[0, s]$, dividiamo ogni intervallo in due parti. Se la somma degli integrali calcolati sulle due parti differisce piú di una data tolleranza ϵ dall' integrale calcolato su tutto l'intervallo, procediamo nella suddivisione, altrimenti lasciamo P invariata.

Sia $intg(I)$ una procedura che calcola $\int_I f(x) dx$ con il metodo dei trapezi [Ber94, Gam94].

La procedura IAD schizzata in C.1 realizza il procedimento. Per calcolare $x(s)$ poniamo $a = 0$, $b = s_{max}$ e applichiamo IAD. Come approssimazione di $(x(s), y(s))$ prendiamo l'interpolazione lineare a tratti dei punti (x_i, y_i) calcolati da IAD.

Esercizio C.4.1 Calcolare la traiettoria nell'intervallo $[0, 10]$, per $k=-0.5$. Disegnare le funzioni interpolatrici per diversi valori di ϵ , es: $\epsilon=0.1, 0.05, 0.025$.

Esercizio C.4.2 Trasformare la procedura IAD da iterativa a ricorsiva.

Esercizio C.4.3 Confrontare le soluzioni con quelle trovate con gli altri schemi.

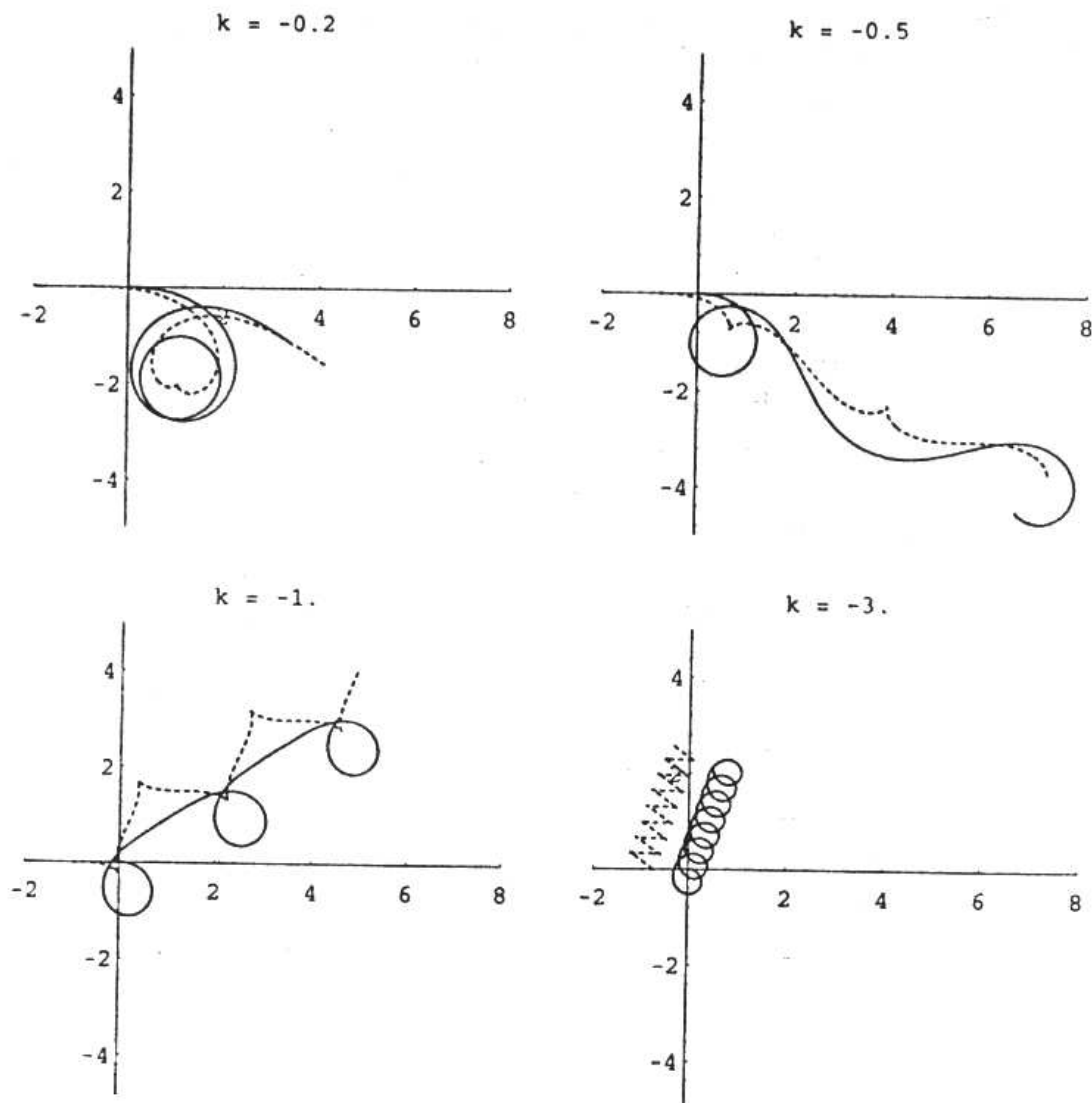


Figura C.2: Traiettorie ottenute scegliendo alcuni valori di k . Le linee continue rappresentano le traiettorie dell'asse anteriore, quelle tratteggiate le traiettorie dell'asse posteriore.

Tabella C.1: IAD: Integrazione adattiva di una funzione continua

```

1 begin {Questa procedura calcola un'approssimazione di  $\int_a^b f(x)dx$ .}
2   Acquisire  $a, b$  estremi di integrazione,  $n$  numero di suddivisioni,
3    $\epsilon$  tolleranza;
4    $intgold := 0$ ;  $intgnew := intgold$ ;  $dx := (b - a)/n$ ;
5    $xv(0) := a$ ;  $P := \emptyset$ ;
6   for  $iv := 1, n$  do
7      $xv(iv) := xv(0) + iv * dx$ ;  $I := [xv(iv - 1), xv(iv)]$ ;
8      $P := P \cup \{I\}$ ;  $mark(I) := true$ ;  $intgv_I := intg(I)$ ;
9   endfor
10   $finito := false$ ;
11  while (not  $finito$ ) do
12     $finito := true$ ,  $intgold := intgnew$ ;
13    for ( $I \in P$ ) do
14      if ( $mark(I)$ )
15        then
16          Dividere l'intervallo  $I$  in due parti  $I_1$  e  $I_2$ ;
17           $intgv_{I_1} := intg(I_1)$ ;  $intgv_{I_2} := intg(I_2)$ ;
18           $s := |(intgv_{I_1} + intgv_{I_2} - intgv_I)/intgv_I|$ ;
19          if ( $s > \epsilon$ )
20            then
21              Mettere  $I_1$  e  $I_2$  al posto di  $I$ ;
22               $n := n + 1$ ;  $mark(I_1) := true$ ,  $mark(I_2) := true$ ;
23               $finito := false$ ;
24            else
25               $mark(I) := false$ ;
26            endif
27          endif
28        endfor
29       $intgnew := 0$ ;
30      for ( $I \in P$ ) do
31         $intgnew := intgnew + intgv_I$ ;
32      endfor
33    endwhile
34  end

```

Appendice D

Analisi della dinamica

D.1 Introduzione

E' dato il sistema di equazioni differenziali:

$$\begin{cases} y_1' &= -[(-\pi y_1 y_4 + \pi y_2 y_3 - y_1) K + 2 y_1 D] / 2 \\ y_2' &= -[(\pi y_2 y_4 + \pi y_1 y_3 - y_2) K + 2 y_2 D] / 2 \\ y_3' &= 2 \pi y_1 y_2 K - 4 y_3 D \\ y_4' &= (\pi y_2^2 - \pi y_1^2) K - 4 y_4 D \end{cases} \quad (\text{D.1})$$

D.2 Compiti

(a) Analizzarne la dinamica rispetto al parametro K , posto $D = 1$.

(b) Date le condizioni iniziali

$$y_1(0) = \epsilon, \quad y_2(0) = \epsilon, \quad y_3(0) = 0, \quad y_4(0) = 0 \quad (\text{D.2})$$

e posto

$$T = 20, \quad D = 1, \quad K = 4, \quad \epsilon = 10^{-6},$$

calcolare le soluzioni del sistema che si ottengono usando almeno due diversi metodi alle differenze finite, fra i quali:

- Runge-Kutta del secondo ordine;
- rappresentazione con differenze in avanti delle derivate e “congelamento” dei secondi membri agli istanti in cui le quantità sono note.

Tabulare e graficare le soluzioni numeriche ottenute.

Bibliografia

- [AM88] J. C. Alexander e J. H. Maddocks. On the maneuvering of vehicles. *SIAM J. Appl. Math.*, 48:38–51, 1988.
- [Apo78] T. M. Apostol. *Calcolo*, volume 1 - Analisi 1. Bollati Boringhieri, Torino, 1978.
- [APZ03] S. Antoniazzi, G. Pavarin, e C. Zanniol. *Esercizi di Matematica A*. Libreria Progetto, Padova, 2003.
- [Ber94] M. Bertsch. *Istituzioni di Matematica*. Bollati Boringhieri, Torino, 1994.
- [Boy80] C. Boyer. *Storia della matematica*. Mondadori, Milano, 1980.
- [DM95] G. De Marco. *Analisi uno: primo corso di Analisi Matematica. Teoria ed esercizi*. Decibel, Padova, 1995.
- [Gam94] G. Gambolati. *Lezioni di Metodi Numerici per Ingegneria e Scienze Applicate*. Cortina, Padova, 1994.
- [Odi01] P. Odifreddi. *C'era una volta un paradosso*. Einaudi, Torino, 2001.
- [PP94] M. Piattelli Palmarini. Illusioni cognitive e razionalità umana. In *Neuroscienze e scienze cognitive*, pagine 21–61. CUEN, Napoli, 1994.
- [QS02] A. Quarteroni e F. Saleri. *Introduzione al Calcolo Scientifico*. Springer Verlag Italia, 2002.
- [Sed88] R. Sedgewick. *Algorithms*. Addison-Wesley, Reading, MA, USA, second edition, 1988.
- [SP00] F. Sartoretto e M. Putti. *Fortran per applicazioni numeriche*. Edizioni Libreria Progetto, Padova, 2000.