Esercizio 1 Sia
$$F_0 = 1, \qquad F_1 = 1, \qquad F_n = F_{n-2} + F_{n-1} \quad \text{se } n > 1$$
la successione di Fibonacci. Dimostrare per induzione che
$$F_m \leq 2^n$$
per ogni $n \in \mathbb{N}$.

Base dell'induzione: $F_0 = 1 \leq 1 = 2^0$ e $F(1) = 1 \leq 2 = 2^1$.
Passo induttivo: sia $n > 1$ allora
$$F(n) = F(n-2) + F(n-1) \leq 2^{n-2} + 2^{n-1} < 2^{n-1} + 2^{n-1} = 2^n.$$

Esercizio 2 Dire quanti sono, a meno di isomorfismo, gli alberi senza radice dotati di 6 vertici.

Sia $\mathcal{A}$ il nostro albero. Si devono distinguere vari casi:
(1) $\mathcal{A}$ ammette un vertice di grado 5; allora $\mathcal{A}$ è necessariamente isomorfo alla "stella a 5 punte".
(2) $\mathcal{A}$ ammette un vertice di grado 4; allora $\mathcal{A}$ è isomorfo a
$$\begin{array}{ccccccc} & & & & * & & \\ & & & & | & & \\ * & - & * & - & * & - & * \\ & & & & | & & \\ & & & & * & & \end{array}$$
(3) $\mathcal{A}$ ammette due vertice di grado 3; allora $\mathcal{A}$ è isomorfo a $\,^*_* > * - * <^*_*$.
(4) $\mathcal{A}$ ammette un vertice di grado 3; allora si possono dare i due sottocasi:
(4.1) $\mathcal{A}$ è (isomorfo a) $^*_* > * - * - * - *$
(4.2) $\mathcal{A}$ è (isomorfo a) $^{*-*}_{*-*} > * - *$.
(5) $\mathcal{A}$ ammette solamente vertici di grado 1 o 2; in questo caso $\mathcal{A}$ è isomorfo a
$$* - * - * - * - * - *.$$

In conclusione esistono 6 alberi non radicati tra loro non isomorfi.

Esercizio 3 Sia $\mathcal{G} = (V, L)$ un albero con 2 vertici di grado 3, 2 vertici di grado 4 e nessun vertice di grado 2 o maggiore di 4. Dire quanti vertici di grado 1 possiede $\mathcal{G}$.

Essendo $\mathcal{G}$ un albero si deve avere $|V| = |L| + 1$ ovvero $|L| = |V| - 1$. Del resto se con $d(v)$ si denota il grado di un vertice $v \in V$ risulta $2|L| = \sum_{v \in V} d(v)$. Allora, detto x il numero di vertici di grado 1 deve risultare:
$$2(x + 2 + 2 - 1) = 2|L| = x + 2 \cdot 3 + 2 \cdot 4)$$
da cui $2x + 6 = x + 14$ e quindi $x = 8$.

Esercizio 4 Dimostrare che un gruppo di ordine 3 è ciclico.

Sia $(G, *, 1)$ un gruppo di ordine 3 e sia $x \in G$ con $x \neq 1$. L'insieme $\langle x \rangle = \{x^n \mid n \in \mathbb{Z}\}$ è un sottogruppo di G per il teorema di Lagrange l'ordine di $\langle x \rangle$ divide quello di G. Dunque $|\langle x \rangle| = 1$ oppure $|\langle x \rangle| = 3$. Ma $1, x \in \langle x \rangle$ e $1 \neq x$; dunque $|\langle x \rangle| \geq= 2$ e quindi $\langle x \rangle| = 3$. Dal fatto che $|G| = 3$ si ottiene che
$$G = \langle x \rangle$$
per ogni $x \in G$ con $x \neq 1$, il che dimostra l'asserto.