

SOLUZIONE COMPITO DI LOGICA

11 Febbraio 2009

1. Si consideri l'insieme \mathbb{N} dei numeri naturali ed il linguaggio usuale dell'aritmetica $\mathcal{L}_{Ar} = \{+, *, 0, 1\}$ con l'uguaglianza come unico predicato. Esprimere formalmente le seguenti frasi:
 - a. Esistono esattamente due numeri naturali.
 - b. I multipli di ogni numero naturale non sono pari.
 - c. 2 è un multiplo di ogni numero dispari.

Possibile Soluzione: Definiamo

- $M(x, y) \equiv x \text{ è multiplo di } y \equiv (\exists k. x = y * k)$
- $2 \equiv (1 + 1)$
- $Pari(x) \equiv (\exists k. x = 2 * k)$
- $Dispari(x) \equiv (\exists k. x = (2 * k) + 1)$.

Le frasi dell'esercizio possono essere formalizzate come segue:

- (a) $\exists xy. x \neq y \wedge (\forall z. z = x \vee z = y)$
 - (b) $\forall y. (\forall x. M(x, y) \rightarrow \neg Pari(x))$
 - (c) $\forall x. Dispari(x) \rightarrow M(2, x)$.
2. Si consideri un linguaggio \mathcal{L} del primo ordine costituito da un predicato binario R ed una costante m .
 - a. Si definisca un modello \mathcal{M} del primo ordine per il linguaggio \mathcal{L} che abbia un universo infinito.
 - b. Si definisca un modello \mathcal{N} del primo ordine per il linguaggio \mathcal{L} che abbia un universo finito.
 - c. Si scriva un enunciato che è vero nel primo modello \mathcal{M} e falso nel secondo \mathcal{N} .

Possibile Soluzione:

- (a) $M \equiv \mathbb{N}, R^{\mathcal{M}}(x, y) \equiv (x = y) \text{ e } m^{\mathcal{M}} \equiv 0$

(b) $N \equiv \{0\}$, $R^N(x, y) \equiv (x = y)$ e $m^N \equiv 0$

(c) L'enunciato $\exists xy. \neg R(x, y)$ è vero in \mathcal{M} ma non in \mathcal{N} .

3. Si esponga l'argomento diagonale e poi lo si applichi al paradosso di Russel oppure al problema della fermata.

La soluzione si trova negli appunti del corso.

4. Verificare con il metodo dei tableaux se i seguenti enunciati sono verità logiche

a. $(\forall xA \rightarrow \forall xB) \rightarrow \forall x(A \rightarrow B)$;

b. $\exists y(C(y) \rightarrow \forall xC(x))$.

Almeno uno dei due precedenti enunciati non è una verità logica. Per tale enunciato trovare un modello del primo ordine che lo rende vero ed un modello del primo ordine che lo rende falso.

Possibile Soluzione:

(a) 1. (tipo α) $F (\forall xA \rightarrow \forall xB) \rightarrow \forall x(A \rightarrow B)$

2. (tipo β) $T \forall xA \rightarrow \forall xB$ da (1)

3. (tipo δ) $F \forall x(A \rightarrow B)$ da (1)

4. (tipo α) $F A(a) \rightarrow B(a)$ da (3) con a nuova costante

5. $T A(a)$ da (4)

6. $F B(a)$ da (4)

7. (tipo δ) $F \forall xA$ da (2)

8. (tipo γ) $T \forall xB$ da (2)

9. $F A(b)$ da (7) con b nuova costante

10. $T B(a)$ da (8)

La costante a in (10) è già stata introdotta in (4). Il procedimento è corretto perché la formula (8) è di tipo γ .

Il primo ramo non si chiude e quindi l'enunciato (a) non è una verità logica.

(b) 1. (tipo γ) $F \exists y(C(y) \rightarrow \forall xC(x))$

2. (tipo α) $F C(a) \rightarrow \forall xC(x)$ da (1) con a costante arbitraria

3. (tipo γ) $F \exists y(C(y) \rightarrow \forall xC(x))$ da (1)

4. $T C(a)$ da (2)

5. (tipo δ) $F \forall xC(x)$ da (2)

6. $F C(b)$ da (5) con b nuova costante

7. (tipo α) $F C(b) \rightarrow \forall xC(x)$ da (3) utilizzando la costante b già introdotta

8. $T C(b)$ da (7)

9. $F \forall xC(x)$ da (7)

L'unico ramo si chiude e quindi l'enunciato (b) è una verità logica.

Modello \mathcal{M} che rende vero l'enunciato (a):

$$M = \{0\}; \quad A^{\mathcal{M}}(x) \equiv (x = 0); \quad B^{\mathcal{M}}(x) \equiv (x = 0)$$

Modello \mathcal{N} che rende falso l'enunciato (a):

$$N = \{0, 1\}; \quad A^{\mathcal{N}}(x) \equiv (x = 0); \quad B^{\mathcal{N}}(x) \equiv (x = 1).$$

Se un enunciato ϕ non è una verità logica, potrebbe non esistere un modello in cui ϕ è vero. Accade se ϕ è una falsità logica. Non è il nostro caso in questo esercizio.