Soluzione COMPITO DI LOGICA
20 Gennaio 2009

1. Si consideri l'insieme $\mathbb{N}$ dei numeri naturali ed il linguaggio usuale dell'aritmetica. Esprimere formalmente le seguenti frasi:

   a. Ogni numero primo e' pari.

   b. x e y hanno un divisore comune diverso da 1.

   c. Soltanto il numero 0 e' maggiore di qualche numero.

   Possibile Soluzione:

   a. $\forall x.$ Primo$(x) \to$ Pari(x)
   Primo$(x) =_{def} x \neq 0 \wedge x \neq 1 \wedge (\forall wz.x = w * z \to (w = 1 \vee z = 1))$
   Pari$(x) =_{def} \exists z.x = z * (1 + 1)$

   b. $\exists z.$ Divide$(z, x) \wedge$ Divide(z, y) $\wedge z \neq 1$
   Divide$(x, y) =_{def} \exists z.y = x * z$

   c. $(\exists y.0 > y) \wedge (\forall z.(\exists y.z > y) \to z = 0)$
   $x > y =_{def} \exists z.x = y + z \wedge z \neq 0$

2. Sia $\mathcal{L}_{Ar} = \{+, *, 0, 1\}$ il linguaggio dell'aritmetica. Definire due modelli del primo ordine di $\mathcal{L}_{Ar}$ che abbiano come universo rispettivamente

   a. L'insieme delle stringhe A^* sull'alfabeto $A = \{a\}$ costituito da un solo carattere.

   b. L'insieme $\{0, 1, 2\}$.

   Si scriva poi un enunciato vero nel primo modello e falso nel secondo.

   Possibile Soluzione:

   a. Sia $a^0 = \lambda$ (la stringa vuota) e $a^{n+1} = a^n a$. Allora $A^* = \{a^n : n \geq 0\}$. Definiamo un modello $\mathcal{M}$ di universo A^* come segue:

   $$0^{\mathcal{M}} = \lambda; \quad 1^{\mathcal{M}} = a; \quad a^n +^{\mathcal{M}} a^k = a^{n+k}; \quad a^n *^{\mathcal{M}} a^k = a^{n*k}$$

   b. Definiamo un modello $\mathcal{N}$ di universo $\{0, 1, 2\}$ come segue:

   $$0^{\mathcal{N}} = 0; \quad 1^{\mathcal{M}} = 1; \quad +^{\mathcal{N}} = \text{somma modulo 3}; \quad *^{\mathcal{N}} = \text{prodotto modulo 3}$$

- $(1+1)+1=0$ e' un enunciato vero nel modello $\mathcal{N}$ ma non nel modello $\mathcal{M}$, mentre l'enunciato "Esistono almeno quattro elementi distinti", formalizzato dall'enunciato $\exists xyzw.x \neq y \wedge x \neq z \wedge x \neq w \wedge y \neq z \wedge y \neq w \wedge z \neq w$, e' vero nel modello $\mathcal{M}$ ma non in $\mathcal{N}$.

3. Sia $\mathbb{N}_{Ar}$ il modello standard ell'aritmetica e si supponga di conoscere che i programmi logici del primo ordine ("fol-programs") costituiscano un linguaggio di programmazione universale. Dimostrare che la teoria $Th(\mathbb{N}_{Ar})$ di tale modello, che costituisce l'insieme delle verita' aritmetiche, non e' ricorsivamente enumerabile.

   Soluzione: Si trova negli appunti.

4. Verificare con il metodo dei tableaux se i seguenti enunciati sono verita' logiche

   a. $(A \to B) \vee (\neg A \to \neg B)$;

   b. $(\neg A \to A) \to A$.

   Soluzione:

   a. 1. F $(A \to B) \vee (\neg A \to \neg B)$
   2. F $A \to B$ (da 1.)
   3. F $\neg A \to \neg B$ (da 1.)
   4. T A (da 2.)
   5. F B (da 2.)
   6. T $\neg A$ (da 3.)
   7. F $\neg B$ (da 3.)
   8. F A (da 6.)
   e l'albero si chiude per 4. e 8.

   b. 1. F $(\neg A \to A) \to A$
   2. T $\neg A \to A$ (da 1.)
   3. F A (da 1.)
   $- - - - - - - - - - - - - - - - - -$
   4. F $\neg A$ (da 2.)   5. T A (da 2.)
   6. T A (da 4.)
   ed i due rami dell'albero si chiudono.