Esercizio 1 Sia $k \in \mathbb{N}$ con $k > 0$. Per ogni $n \in \mathbb{N}$ con $n > 0$ si defisca $f(n)$ ponendo

$$f(1) = k - 1, \quad k \cdot f(n-1) + k - 1 \quad \text{se} \;\; n \geq 1.$$

Si dimostri, ragionando per induzione su n, che $f(n) = k^n - 1$.

Base dell'induzione: $k - 1 = f(1) = k^1 - 1$.
Passo induttivo: $f(n) = k \cdot f(n-1) + k - 1 = k(k^{n-1} - 1) + k - 1 = k^n - k + k - 1 = k^n - 1$.

Esercizio 2 Sia $\mathcal{A} = \{f : [0,1] \longrightarrow [0,1]\}$ l' insieme delle funzioni di $[0,1]$ su $[0,1]$ (ove $[0,1] = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leq x \leq 1\}$). In $\mathcal{A}$ si definisca un ordinamento parziale ponendo $f \leq g$ se e solo se $f(x) \leq g(x)$ per ogni $x \in [0,1]$.

- Si provi che $(\mathcal{A}, \leq)$ è un reticolo.
- Il reticolo $(\mathcal{A}, \leq)$ è limitato inferiormente?
- Il reticolo $(\mathcal{A}, \leq)$ è limitato superiormente?

- $\mathcal{A}$ è un reticolo, infatti presi due elementi $f, g \in \mathcal{A}$ risulta:

$$(f \vee g)(x) = \max\{f(x), g(x)\} \quad \text{e} \quad (f \wedge g)(x) = \min\{f(x), g(x)\}.$$

- il reticolo $\mathcal{A}$ è limitato sia superiormente che inferiormente; è sufficiente definire gli elementi **1** e **0** appartenenti a $\mathcal{A}$ (con ovvio significato dei simboli) ponendo:

$$\mathbf{1} : [0,1] \to [0,1] \;\; x \mapsto 1 \quad \text{e} \quad \mathbf{0} : [0,1] \to [0,1] \;\; x \mapsto 0.$$

Esercizio 3 Sia $\mathcal{G} = (V, L)$ un albero con 4 vertici di grado 3, 5 vertici di grado 4 e nessun vertice di grado 2 o maggiore di 4. Dire quanti vertici di grado 1 possiede $\mathcal{G}$.

Essendo $\mathcal{G}$ un grafo si deve avere $|V| = |L| - 1$ ovvero $|L| = |V| + 1$. Del resto se con $d(v)$ si denota il grado di un vertice $v \in V$ risulta $2|L| = \sum_{v \in V} d(v)$. Allora, detto k il numero di vertici di grado 1 deve risultare:

$$2(x + 4 + 5 + 1) = 2|L| = x + 3 \cdot 4 + 5 \cdot 4$$

da cui $2x + 18 = x + 32$ e quindi $x = 14$.

Esercizio 4 Sia $(G, *, 1)$ un gruppo. Dati due elementi g, h di G si ponga $g \sim h$ se esiste un elemento $x \in G$ tale che $g = x^{-1} * h * x$.

Si provi che la relazione $\sim$ è un' equivalenza in G.

(R) per ogni $g \in G$ si ha $g = 1^{-1} * g * 1$ e quindi $g \sim g$;
(S) se $g \sim h$ allora esiste x con $g = x^{-1} * h * x$ da cui si ricava $h = x * g * x^{-1}$ e dunque $h \sim g$.
(T) supponiamo $g \sim h$ e $h \sim k$; allora esistono $x, y \in G$ con $g = x^{-1} * h * x$ e $h = y^{-1} * k * y$ da cui

$$g = x^{-1} * (y^{-1} * k * y) * x = (x^{-1} * y^{-1}) * k * (y * x) = (y * x)^{-1} * k * (y * x)$$

e quindi $g \sim k$.