Mestre 4-06-2013

Prova scritta di Matematica Discreta del 4-06-2013
Modulo II (Algebra Lineare)

Cognome e nome :…………………………………….

Numero di Matricola:………………………………..

Es.1 Si trovino le soluzioni del sistema di equazioni lineari $AX=B$ ove

$$A=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & -1 \\ 3 & -1 & 4 \end{pmatrix},\ X=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 6 \end{pmatrix}.$$

Es. 2 Dati i 3 vettori di R^3 (1,1,1), (2,1,3), (-1,0,1), si provi che essi formano una base B di R^3. Si determini la matrice di cambiamento di base dalla base canonica alla base *B.*

Es. 3 Sia φ: $R^3 \to R^3$ l'applicazione lineare dallo spazio vettoriale R^3 in se, ove R è Il campo dei numeri reali , tale che

φ(a,b,c)=(2a+b+3c, a+2b-3c, 4a+3b+3c)

Si calcolino dim.(Ker φ) e dim. φ(R^3)

Es. 4 Sia φ: $R^2 \to R^2$ l'applicazione lineare dallo spazio vettoriale R^2 in se, la cui matrice associata rispetto alla base canonica è $M=\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$. Si calcolino gli autovalori di φ e si trovi una base B di R^2 tale che la matrice associata a φ rispetto alla base B sia una matrice diagonale.

Soluzioni degli esercizi

Es.1 Un metodo è quello di utilizzare l'eliminazione di Gauss trasformando in forma a scala per righe la matrice completa del sistema (A|B). Si ottiene così la matrice in forma a scala per righe (A'|B')= $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, da cui si deduce che il sistema ha come unica soluzione (1,1,1). Si poteva anche osservare che la matrice incompleta A del sistema è invertibile, in quanto il suo determinante è -2. Pertanto, moltiplicando a sinistra per A^{-1} ambo i membri di $AX=B$, si ottiene $A^{-1}AX=A^{-1}B$, e cioè $X=A^{-1}B$. Ciò significa che il sistema ha come unica soluzione $A^{-1}B$. Per ottenerla bisogna calcolare A^{-1}. In quanto a calcoli in questo caso è più conveniente il primo metodo.

Es.2. Poichè R^3 ha dimensione 3, basta verificare che i tre vettori dati siano linearmente indipendenti. Per verificarlo consideriamo la matrice A le cui colonne sono i tre vettori dati. Dunque $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$. Il rango di A è uguale a 3, poiché $\det(A)\neq 0$. Ciò significa che le colonne di A, e cioè i tre vettori dati, sono linearmente indipendenti. La matrice di passaggio dalla base canonica alla base B è la matrice inversa di A, poiché A, che ha come colonne le coordinate dei tre vettori dati rispetto alla base canonica, è la matrice di passaggio dalla base B alla base canonica.. Calcolandola con il metodo dell'eliminazione di Gauss, si ottiene

$$A^{-1}=\begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & \frac{5}{3} & -\frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

Es.3. La matrice associata a φ rispetto alla base canonica è $A=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & -3 \\ 4 & 3 & 3 \end{pmatrix}$. A ha rango 2, poiché $\det(A)=0$, e A possiede minori di ordine 2 il cui determinante è $\neq 0$, per esempio il minore $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$. Il rango di A coincide con dim. $\varphi(R^3)$, che dunque =2. Per la formula
dim.(R^3)=dim.(Kerφ)+ dim. $\varphi(R^3)$, si ottiene che dim.(Kerφ)=1.

Es.4. Il polinomio caratteristico di φ è $\lambda^2-6\lambda+5$, le cui radici, con molteplicità 1, e cioè gli autovalori per φ sono 1 e 5. Poiché gli autospazi relativi hanno necessariamente dimensione 1, basterà trovare un autovettore relativo all'autovalore 1 e un autovettore relativo all'autovalore 5. Essi formeranno una base rispetto alla quale la matrice associata a φ sarà $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$. Per trovare tali autovettori, basterà trovare una soluzione non nulla per ciascuno dei due sistemi di equazioni lineari $\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. Si vede subito che una soluzione per il primo sistema è (1,-1), mentre per il secondo è (1,1). Dunque ((1,-1), (1,1)) è una base B di R^2 rispetto alla quale la matrice associata a φ sarà $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$.