Soluzioni degli esercizi della prova scritta di MD del 23 maggio 2011

Esercizi relativi al II semestre

<u>Es.</u> Si trovino tutte le soluzioni delle seguenti congruenze:

1) $7x \equiv 8$ (mod. 9)

2) $6x \equiv 5$ (mod.9)

Soluzione: Ricordiamo che trovare le soluzioni di una congruenza mod n equivale a risolvere una equazione in Z/nZ .

1) la congruenza equivale all'equazione [7][x]=[8] in Z/9Z. [7] è un elemento invertibile di Z/9Z perché 7 e 9 sono coprimi e ciò implica che l'equazione ha una ed una sola soluzione [a] in Z/9Z data da $[a]= [7]^{-1}[8]$. E' facile calcolare $[7]^{-1}$ senza dover usare l'identità di Bezout, dato che gli elementi invertibili di di Z/9Z sono soltanto 6, e dunque, per tentativi, si vede subito che $[7]^{-1}=[4]$ e dunque [a] =[32] =[5]. Ciò significa che tutte e sole le soluzioni della congruenza sono tutti i numeri interi congrui a 5 modulo 9.

2) [6] non è invertibile in Z/9Z e dunque nemmeno [6][a] per ogni [a], mentre [5] lo è. Ciò implica che l'equazione [6] [x]= [5] non può avere soluzioni in Z/9Z, e ciò equivale a dire che la congruenza $6x \equiv 5$ (mod.9) non può avere soluzioni in Z.

<u>Es.</u> a) Si dia la definizione di grafo connesso.

b) Si provi che se $G=(V,E)$ è un grafo connesso con n vertici e m lati, con $m \geq n$, allora esiste almeno un lato $\{x,y\}$ di G tale che il grafo $G'=(V, E \setminus \{x,y\})$ è ancora un grafo connesso.

Soluzione: a) Un grafo $G=(V,E)$ si dice connesso se per ogni coppia di vertici distinti v e w di V esiste una sequenza $v= v_1,\ldots, v_n=w$ di vertici di V tali che i lati $\{ v_{i-1} , v_i \}$ costituiscono un cammino (att! La definizione di cammino, path in inglese, richiede che i lati che lo costituiscono siano a due a due distinti tra loro).

b) Sia T un albero di supporto per G. T ha n-1 lati ed è connesso. Aggiungendo eventualmente a T alcuni lati di G fino a raggiungere il numero di m-1 lati, otterrò il grafo G' richiesto.

<u>Es.</u> Ricordiamo che la matrice di adiacenza A di un grafo $G=(V,E)$ (che non è esattamente la *lista* di adiacenza definita nel testo del Biggs, ma che concettualmente è la stessa cosa, e cioè un modo compatto di rappresentare un grafo tramite una tabella che permette, dati i vertici, di individuare i lati) è definita nel modo seguente: se $V=\{ v_1,\ldots, v_n\}$, $A=(a_{ij})$ è la matrice $n\times n$ con $a_{ij}=1$ se v_i e v_j sono adiacenti, cioè se $\{ v_i , v_j \}$ è un lato di G, $a_{ij}=0$ altrimenti. In particolare A è una matrice simmetrica le cui entrate sono 1 e 0.

Siano $G=(V,E)$ e $G'=(V',E')$, le cui matrici di adiacenza sono rispettivamente

$$A=\begin{pmatrix}0&1&0&0&1&0&1\\1&0&1&0&0&0&0\\0&1&0&1&0&0&1\\0&0&1&0&1&1&0\\1&0&0&1&0&1&0\\0&0&0&1&1&0&1\\1&0&1&0&0&1&0\end{pmatrix}\qquad \text{e } A'=\begin{pmatrix}0&0&1&0&0&1&1\\0&0&0&0&1&0&1\\1&0&0&1&0&1&0\\0&0&1&0&0&0&1\\0&1&0&0&0&1&1\\1&0&1&0&1&0&0\\1&1&0&1&1&0&0\end{pmatrix}$$

Si dica se G e G' sono isomorfi, motivando adeguatamente la risposta.

Soluzione : dalle matrici di adiacenza si vede che il vertice corrispondente alla settima colonna (o riga) in G' ha grado 4, mentre G non ha vertici di grado 4. Ciò implica che G e G' non possono essere isomorfi.

Es. Si provi che se a ed n sono numeri interi coprimi, allora per ogni $b\in[a]_{|n|}\in\mathbb{Z}/|n|\mathbb{Z}$, anche b ed n sono numeri interi coprimi.

Soluzione : si avrà b=a+rn, per qualche intero r. Se un numero intero m divide b ed n, allora divide $b-rn=a$ e divide n. Pertanto, essendo a ed n coprimi, m= ± 1.