Primo Compitino Matematica Discreta BBBBBB
6 Dicembre 2011

Cognome e Nome:
Numero di Matricola:

1. Dimostrare per induzione che
$$n^3 \geq 2n^2 + 1$$
per ogni $n \geq 3$.

   Soluzione: base induzione $n = 3$: $27 = 3^3 \geq 2 \times 3^2 + 1 = 19$. OK

   Supponiamo che $n^3 \geq 2n^2+1$ e dimostriamo che $(n+1)^3 \geq 2(n+1)^2+1$. Dal momento che $2(n+1)^2+1 = 2n^2+4n+3$ e $(n+1)^3 = n^3+3n^2+3n+1$ e' sufficiente provare che
$$\underline{n^3} + 3n^2 + 3n + 1 \geq 2n^2 + 4n + 3 = \underline{2n^2 + 1} + 4n + 2$$
   Dall'ipotesi induttiva sappiamo che $n^3 \geq 2n^2 + 1$, quindi resta da provare che
$$3n^2 + 3n + 1 \geq 4n + 2$$
   ossia
$$3n^2 - n = n(3n-1) \geq 1.$$
   Il prodotto di due numeri naturali e' maggiore o uguale ad 1 se entrambi sono maggiori o uguali ad 1. La relazione $n \geq 1$ e' vera perche' per ipotesi $n \geq 3$. Inoltre $3n - 1 \geq 1$ sse $3n \geq 2$, che e' vero perche' $3n \geq 3 \geq 2$ dall'ipotesi che $n \geq 3$.

2. Dimostrare la seguente uguaglianza insiemistica: $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$.

   Soluzione: (1) $A \cap (B \cup C) \subseteq (A \cap B) \cup (A \cap C)$.

   Sia $x \in A \cap (B \cup C)$. Allora $x \in A$ e $x \in B \cup C$. Distinguiamo due casi

   $x \in B$: da $x \in A$ e $x \in B$ segue che $x \in A \cap B$. Cosi' x appartiene ad ogni sovrainsieme di $A \cap B$, in particolare $(A \cap B) \cup (A \cap C)$.

   $x \in C$: da $x \in A$ e $x \in C$ segue che $x \in A \cap C$. Cosi' x appartiene ad ogni sovrainsieme di $A \cap C$, in particolare $(A \cap B) \cup (A \cap C)$.

   (2) $(A \cap B) \cup (A \cap C) \subseteq A \cap (B \cup C)$.

   Sia $x \in (A \cap B) \cup (A \cap C)$. Allora $x \in A \cap B$ oppure $x \in A \cap C$. Distinguiamop i due casi:

(a) $x \in A \cap B$: Allora $x \in A$ e $x \in B$. Da quest'ultima relazione segue che $x \in B \cup C$. Quindi $x \in A \cap (B \cup C)$.

(b) $x \in A \cap C$: Allora $x \in A$ e $x \in C$. Da quest'ultima relazione segue che $x \in B \cup C$. Quindi $x \in A \cap (B \cup C)$.

3. Determinare, giustificando la risposta, se l'enunciato

$$\forall a \forall b [a + b \text{ primo} \Rightarrow a \text{ primo oppure } b \text{ primo}]$$

e' vero o falso.

Soluzione: L'enunciato e' falso. Controesempio: $a = 9$ e $b = 4$. $9 + 4 = 13$ e' primo, ma ne' 9 ne' 4 sono primi.

4. Formalizzare l'enunciato "Giovanni non ama ogni libro giallo".

Sia $g \equiv$ Giovanni una costante, $xAy \equiv x$ ama y e $R(x) \equiv x$ e' un libro giallo. Ecco la formalizzazione

$$\exists x (R(x) \wedge \neg(gAx))$$

Un'altra formalizzazione:

$$\neg \forall x (R(x) \rightarrow gAx)$$

Infatti, applicando le equivalenze logiche conosciute

- $\neg \forall x P \Leftrightarrow \exists x \neg P$;
- $B \rightarrow C \Leftrightarrow \neg B \vee C$;
- $\neg\neg B \Leftrightarrow B$;
- $\neg(B \vee C) \Leftrightarrow \neg B \wedge \neg C$,

si ha:

$$\begin{aligned} \neg \forall x (R(x) \rightarrow gAx) &\Leftrightarrow \exists x \neg (R(x) \rightarrow gAx) \\ &\Leftrightarrow \exists x \neg (\neg R(x) \vee gAx) \\ &\Leftrightarrow \exists x (\neg\neg R(x) \wedge \neg(gAx)) \\ &\Leftrightarrow \exists x (R(x) \wedge \neg(gAx)) \end{aligned}$$

5. Determinare quali proprietà verifica la seguente binaria relazione R tra numeri interi:

$$xRy \text{ sse } x^2 + y \geq 0.$$