Matematica Discreta (3 crediti)
23 Maggio 2011

1. Si dimostri per induzione che $1 + \cdots + n \le n^n$.

   Soluzione Base dell'induzione $n = 1$: $1 \le 1^1 = 1$. OK

   Supponiamo, per ipotesi d'induzione, che $1 + \cdots + n \le n^n$. Allora si ha

$$
\begin{array}{rcll}
(1 + \cdots + n) + (n+1) & \le & n^n + (n+1) & \\
 & \le & (n+1)^n + (n+1) & \text{per le proprieta' delle potenze, da } x \le y \text{ e } z \ge 0 \text{ segue} \\
 & & & \text{che } x^z \le y^z\text{; allora poniamo } x = n,\ y = n+1 \text{ e } z = n \\
 & \le & n(n+1)^n + (n+1) & \text{da } n \ge 1 \\
 & \le & n(n+1)^n + (n+1)^n & \text{da } n+1 \le (n+1)^n \\
 & = & (n+1)^{n+1} &
\end{array}
$$

2. Nell'insieme $N_0 \times N_0$ delle coppie di numeri naturali, si definisca, per ogni $(a, b), (c, d) \in N_0 \times N_0$, la relazione seguente: $(a, b)R(c, d) \Leftrightarrow a + b + c + d = 100$.

   a) Quali proprieta' verifica la relazione R?

   Soluzione

   Prop. Riflessiva: NO. Controesempio: $(0, 0)R(0, 0)$ non vale perche' $0 + 0 + 0 + 0 = 0 \neq 100$.

   Prop. Simmetrica: SI. Supponiamo che $(a, b)R(c, d)$, cioe' $a + b + c + d = 100$. Allora dalla proprieta' commutativa della somma segue che $c + d + a + b = 100$, cioe' $(c, d)R(a, b)$.

   Prop. Transitiva: NO. Controesempio: $(1, 1)R(98, 0)$ e $(98, 0)R(2, 0)$ ma $(1, 1)R(2, 0)$ non vale.

   Prop. Irriflessiva: NO. Controesempio: $(50, 0)R(50, 0)$ vale.

   Prop. Antisimmetrica: NO. Controesempio: $(98, 0)R(2, 0)$ e $(2, 0)R(98, 0)$ ma $(2, 0) \neq (98, 0)$.

   b) Determinare quante sono le coppie (c, d) tali che $(2, 3)R(c, d)$.

   $2 + 3 + c + d = 100$, implica $d = 95 - c$ con c che varia da 0 a 95. Quindi abbiamo in totale 96 coppie.

3. Si definisca S(x)= x e' uno studente, P(x) = x e' un professore e R(x,y) = x ammira y. Si formalizzi la seguente frase: qualche professore ammira tutti gli studenti.

$$\exists x(Px \wedge \forall y(Sy \rightarrow R(x,y)))$$