Matematica Discreta (6 crediti) BBBBBB
16 Gennaio 2015

Cognome e Nome:
Numero di Matricola:

1. Dimostrare per induzione che
$$n^3 \geq n^2 + 2n + 3$$
per ogni $n \geq 3$.

Soluzione: Base induzione $n = 3$: $3^3 = 27 \geq 3^2 + 6 + 3 = 18$. OK

Supponiamo, per ipotesi d'induzione, che $n^3 \geq n^2+2n+3$ e dimostriamo che $(n+1)^3 \geq (n+1)^2+2(n+1)+3$. Abbiamo che $(n+1)^2+2(n+1)+3 = (n^2+2n+1)+(2n+2)+3 = n^2 + 4n + 6$ ed inoltre $(n + 1)^3 = n^3 + 3n^2 + 3n + 1$. Quindi dobbiamo provare che:
$$\underline{n^3} + 3n^2 + 3n + 1 \geq n^2 + 4n + 6 = \underline{n^2 + 2n + 3} + (2n + 3)$$
Dal momento che $n^3 \geq n^2 + 2n + 3$ (Ip. Ind.), è sufficiente provare che
$$3n^2 + 3n + 1 \geq 2n + 3$$
ossia
$$3n^2 + n \geq 2$$
che è vera per ogni $n \geq 3$.

2. Formalizzare nel linguaggio matematico i seguenti due enunciati:

   (i) Ogni professore odia qualche studente.

   (ii) Qualche professore non mangia.

Soluzione: Consideriamo l'universo costituito dagli esseri umani. Consideriamo le seguenti relazioni:

(a) $S(x)$ se e solo "x è uno studente"

(a) $P(x)$ se e solo "x è un professore"

(b) $T(x, y)$ se e solo se "x odia y"

(c) $L(x)$ se e solo se "x mangia"

Si noti che S, P ed L sono relazioni unarie mentre T è una relazione binaria. Allora i due enunciati sono formalizzati come segue:

$\forall x(P(x) \to \exists y(S(y) \wedge T(x, y)))$

$\exists x(P(x) \wedge \neg L(x))$.

3. Sia A^* l'insieme delle parole di alfabeto A. Determinare quali proprietà verifica la seguente relazione binaria R su A^*:

   xRy sse il primo carattere della parola x è uguale al primo carattere della parola y.

   Soluzione: Sia $p : A^* \to A$ la funzione così definita, per ogni stringa $x \in A^*$:

   $$p(x) = \text{ primo carattere del della stringa } x.$$

   Per esempio, se applichiamo la funzione p alla stringa "casa", otteniamo $p(\text{casa}) = c$.

   Proprietà Riflessiva: $\forall x(xRx)$. La proprietà vale perché xRx sse $p(x) = p(x)$, che è vera.

   Proprietà Simmetrica: Sia xRy, cioé $p(x) = p(y)$. Allora, $p(y) = p(x)$ che implica yRx.

   Proprietà transitiva: Sia xRy e yRz, cioé $p(x) = p(y)$ e $p(y) = p(z)$. Per la proprietà transitiva dell'uguaglianza si ha $p(x) = p(z)$ che implica xRz.

   Proprietà antisimmetrica: non vale. Troviamo un controesempio. $p(\text{casa}) = c$ e $p(\text{canestro}) = c$, da cui

   $$\text{casa } R \text{ canestro}$$

   e

   $$\text{canestro } R \text{ casa}$$

   ma le due stringhe sono diverse.

4. Consideriamo un mazzo costituito da 20 carte distinte. In quanti modi possiamo distribuire tutte le 20 carte tra cinque giocatori distinguibili (numerati da 1 a 5) in maniera tale che ogni giocatore abbia 4 carte? Si supponga che, dato un giocatore i, l'ordine delle quattro carte di i sia importante.

   Soluzione: Per la prima carta del giocatore 1 abbiamo 20 possibilità, per la seconda carta del giocatore 1 abbiamo 19 possibilità, e così via, per l'ultima e quarta carta del giocatore 1 abbiamo 17 possibilità. Quando passiamo al giocatore 2 rimangono 16 carte. Il principio con cui ne distribuiamo 4 carte al giocatore 2 è lo stesso. Quindi, 16 possibilità per la prima carta del giocatore 2, etc. Alla fine, abbiamo un numero di possibilità che è pari al numero delle permutazioni di un insieme di 20 elementi: 20! possibilità.

5. Si calcoli il resto della divisione di 2^{188} per 63.

   Soluzione: Si verifica facilmente che $2^6 = 64 \equiv_{63} 1$. Quindi abbiamo:

   $$2^{188} = 2^{(6\times 31)+2} = 2^{6\times 31}2^2 = (2^6)^{31}2^2 \equiv_{63} 1^{31} \times 4 = 4.$$