SOLUZIONI: Matematica Discreta (12 crediti) + compitino II parte
15 Giugno 2010

1. Dimostrare per induzione che

$$1 + 2 + \ldots n = n(n+1)/2$$

per ogni $n \geq 1$.

Soluzione: Base induzione: $1 = 1(1+1)/2$. OK

Supponiamo che valga $1 + 2 + \ldots n = n(n+1)/2$. Allora $1 + 2 + \ldots n + (n+1) = n(n+1)/2 + (n+1) = (n+1)(n/2+1) = (n+1)(n+2)/2$.

2. Nell'insieme $N_0 \times N_0$ delle coppie di numeri naturali si definisca, per ogni $(a,b),(c,d) \in N_0 \times N_0$, la relazione

$$(a,b)\ R\ (c,d) \Leftrightarrow a + 3 = c.$$

(a) Verificare se la relazione R è una relazione di equivalenza.

(b) Determinare quante sono le coppie (c,d) tale che $(0,0)\ R\ (c,d)$;

Soluzione: R non è riflessiva perchè la coppia $(0,0)$ non è in relazione con se stessa. Infatti, $0 + 3 \neq 0$. Quindi R non è una relazione di equivalenza.

Abbiamo $(0,0)\ R\ (c,d)$ sse $0 + 3 = c$, cioè $c = 3$. Quindi abbiamo infinite coppie $(3,d)$ ($d \in N_0$) equivalenti a $(0,0)$.

3. Si definisca $S(x) \equiv x$ è uno studente, $P(x) \equiv x$ è un professore e $R(x,y) \equiv x$ ammira y. Si formalizzi la seguente frase:

Ogni studente ammira qualche professore.

Soluzione: $\forall x(S(x) \to \exists y(P(y) \wedge R(x,y)))$.

4. Si calcoli il massimo comun divisore positivo d di 167 e 389 e lo si esprima nella forma $d = 167n + 389m$ con m ed n numeri interi opportuni.

Soluzione: Usiamo l'algoritmo di Euclide per calcolare il MCD positivo di 389 e 167:

$$389 = 167 \times 2 + 55; \quad 167 = 55 \times 3 + 2; \quad 55 = 2 \times 27 + 1; \quad 2 = 1 \times 2 + 0.$$

Poichè il MCD positivo coincide con l'ultimo resto non nullo, in questo caso 1, i due numeri sono coprimi. Per calcolare m ed n usiamo l'algoritmo partendo dal basso.

$$1 = 55 - (27 \times 2) = (82 \times 55) - (167 \times 27) = (389 \times 82) - (167 \times 191).$$

Pertanto $m = 82$, $n = -191$.

5. Sia $G = (V, E)$ un grafo finito connesso e privo di circuiti euleriani, $v_0 \notin V$ un vertice ulteriore ed $E' = \{\{v, v_0\} : v \in V$ è un vertice di grado dispari in $G\}$. Si supponga $|V| > 1$ e si consideri il grafo $G' = (V \cup \{v_0\}, E \cup E)$.

   (a) Si dimostri che G' connesso.

   (b) Si dimostri che il vertice v_0 di G' ha grado pari.

   Soluzione: (a) Dati due vertici v, w di G' si deve provare che esiste un cammino da v a w in G'. Distinguiamo due casi: (i) $v_0 \notin \{v, w\}$. Poich G è connesso, in G, e a maggior ragione in G', esiste un cammino da v a w. (ii) $v_0 \in \{v, w\}$. Per simmetria possiamo supporre $v = v_0$. Poichè G non ha circuiti euleriani, per un teorema dimostrato a lezione G ha almeno un vertice di grado dispari, sia v_1. Poichè G è connesso, esiste un cammino in G da w a v_1 e $\{v_1, v_0\}$ è un lato di G' (per definizione di G'). Dunque esiste un cammino da w a $v_0 = v$ in G'.

   (b) Calcoliamo il numero dei lati contenenti v_0. Per definizione di G', tale numero coincide con il numero dei vertici di grado dispari di G. Ma ogni grafo ha un numero pari di vertici di grado dispari. Quindi v_0 appartiene ad un numero pari di lati.

6. Si provi che in un albero con n vertici la somma dei gradi dei vertici è $2n - 2$.

   Soluzione: Sappiamo che in ogni grafo $G = (V, E)$ vale la formula $1/2(\sum_{v \in V} \delta(v)) = |E|$, dove il grado $\delta(v)$ coincide con il numero di archi che incidono nel vertice v. Inoltre, se il grafo G un albero, si ha $|E| = |V| - 1$, e dunque $1/2(\sum_{v \in V} \delta(v)) = n - 1$, da cui $\sum_{v \in V} \delta(v) = 2n - 2$.

7. Si provi che un albero è un grafo bipartito.

   Soluzione: Un albero non contiene cicli, in particolare cicli di lunghezza dispari. Abbiamo dimostrato che un grafo è bipartito se e solo se non contiene cicli di lunghezza dispari. Quindi, un albero è necessariamente un grafo bipartito.