Matematica Discreta (12 crediti)
9 Maggio 2011

1. Verificare per induzione se

$$1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 = n(n+1)(2n+1)/6$$

per ogni $n \geq 1$.

Soluzione:

Base dell'induzione ($n = 1$): $1^2 = 1 = 1(1+1)(2 \times 1 + 1)/6 = 6/6 = 1$ OK.

Supponiamo per ipotesi d'induzione che $1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 = n(n+1)(2n+1)/6$ e proviamo l'identità per $n+1$:

$$\begin{array}{rcll}
1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 + (n+1)^2 & = & n(n+1)(2n+1)/6 + (n+1)^2 & \text{ip. ind.} \\
& = & [(n+1)/6] \times [n(2n+1) + 6(n+1)] & \\
& = & [(n+1)/6] \times [n(2n+1) + 6n + 6] & \\
& = & [(n+1)/6] \times [n(2n+3) + 4n + 6] & \\
& = & [(n+1)/6] \times [n(2n+3) + 2(2n+3)] & \\
& = & [(n+1)/6](n+2)(2n+3) & \\
& = & (n+1)(n+2)(2n+3)/6 &
\end{array}$$

2. Nell'insieme N_0 dei numeri naturali si definisca la seguente relazione

$$n\ R\ k \Leftrightarrow \text{ 6 divide } n + k$$

   (a) Determinare quali proprieta' verifica la relazione R.

   (b) Determinare i numeri naturali n tali che $n\ R\ 7$.

Soluzione:

a) La proprietà riflessiva non vale. Per esempio, $1\ R\ 1$ non vale (6 non divide $1 + 1$).

La proprietà simmetrica vale. La somma tra numeri naturali e' commutativa. Quindi, se 6 divide $n + k$, allora 6 divide pure $k + n = n + k$.

La proprietà transitiva non vale: 6 divide entrambi $5 + 1$ e $1 + 5$, ma non divide $5 + 5$.

La proprietà antisimmetrica non vale perche' 6 divide $5 + 1$ e $1 + 5$ ma 1 e' diverso da 5.

b) Se $n + 7$ e' un multiplo di 6, allora n e' congruo a 5 modulo 6, i.e., $n = 5 + 6k$ per $k \geq 0$.

3. Sia $\mathcal{A} = \{f : \{a, b, c\} \longrightarrow N_0\}$ l' insieme delle funzioni dall'insieme $X = \{a, b, c\}$ sull'insieme N_0 dei numeri naturali. In $\mathcal{A}$ si definisca una relazione ponendo $f \leq g$ se e solo se $f(a) \leq g(a)$.

   Quali proprieta' verifica la relazione $\leq$?

   Soluzione: La relazione $\leq$ su $\mathcal{A}$ e' riflessiva e transitiva, ma non simmetrica e antisimmetrica.

   La proprietà riflessiva segue dalla corrispondente proprietà riflessiva dell'ordinamento usuale sui numeri naturali. $f \leq f$ segue da $f(a) \leq f(a)$.

   La proprietà transitiva segue dalla corrispondente proprietà dell'ordinamento usuale sui numeri naturali. Se $f \leq g$ e $g \leq h$, allora $f(a) \leq g(a)$ e $g(a) \leq h(a)$. Allora $f(a) \leq h(a)$ che implica $f \leq h$.

   La proprietà simmetrica non vale: Siano f, g due funzioni tali che $f(a) = 5$ e $g(a) = 6$. Allora $f \leq g$ ma $g \not\leq f$.

   La proprietà antisimmetrica non vale: Siano f, g due funzioni tali che $f(a) = g(a) = 5$ ma $f(b) = 0$ e $g(b) = 1$. Allora $f \leq g$ e $g \leq f$ ma $f \neq g$.

4. Si provi che esistono due numeri interi x e y tali che $35x + 78y = 253654833$.

5. Si provi che, se $G = (V, E)$ e' un grafo connesso con n vertici e n lati ($n \geq 3$), allora G possiede uno ed un solo circuito.