

# Soluzione Matematica Discreta (prima parte)

## 4 Settembre 2009

Cognome e Nome:

Numero di Matricola:

1. Dimostrare per induzione che

$$1 + 2 + \dots + n \leq n(n + 1) \leq n!$$

per ogni  $n \geq 4$ .

*Soluzione:*

(Base dell'induzione  $n = 4$ ):  $1 + 2 + 3 + 4 = 10 \leq 4 \times 5 = 20 \leq 4! = 24$ .

Per ipotesi d'induzione supponiamo la disuguaglianza vera per  $n$ . La proviamo per  $n + 1$ :

$$\begin{aligned} 1 + 2 + \dots + n + (n + 1) &= (1 + 2 + \dots + n) + (n + 1) \\ &\leq n(n + 1) + (n + 1) && \text{per ipotesi d'induzione} \\ &= (n + 1)(n + 1) \\ &\leq (n + 1)(n + 2) \\ &= (n + 1)n + (n + 1)2 \\ &= n(n + 1) + 2(n + 1) \\ &\leq n! + 2(n + 1) && \text{per ipotesi d'induzione} \\ &\leq n! + 2(n + n) && (n \geq 4) \\ &= n! + 4n \\ &\leq n! + (n! \times n) && n! > 4 \text{ for } n \geq 4 \\ &= (n + 1)! \end{aligned}$$

2. Nell'insieme  $N_0 \times N_0$  si definisca, per ogni  $(a, b), (c, d) \in N_0 \times N_0$ , la relazione

$$(a, b) \preceq (c, d) \Leftrightarrow a + d = bc.$$

- Dire quali di queste proprietà verifica la relazione  $\preceq$ : riflessività, simmetria, transitività, antisimmetria;
- Determinare quali sono le coppie  $(c, d)$  tale che  $(0, 0) \preceq (c, d)$ ;
- Determinare se l'insieme  $\{(a, b) : (a, b) \preceq (5, 7)\}$  ha un numero finito di elementi.

*Soluzione:*

*Proprieta' riflessiva:* NO, perche'  $(1, 1) \not\preceq (1, 1)$ . Infatti,  $2 = 1 + 1 \neq 1 \times 1 = 1$ .

*Proprieta' simmetrica:* NO, perche'  $(1, 1) \preceq (2, 1)$  mentre  $(2, 1) \not\preceq (1, 1)$ . Infatti, nel primo caso  $2 = 1 + 1 = 1 \times 2 = 2$ , mentre nel secondo caso  $3 = 2 + 1 \neq 1 \times 1 = 1$ .

*Proprieta' transitiva:* NO, perche'  $(1, 1) \preceq (2, 1) \preceq (4, 2)$ , mentre  $(1, 1) \not\preceq (4, 2)$ . Infatti,

$(1, 1) \preceq (2, 1)$  perche'  $2 = 1 + 1 = 1 \times 2$ ;

$(2, 1) \preceq (4, 2)$  perche'  $4 = 2 + 2 = 1 \times 4$ ;

$(1, 1) \not\preceq (4, 2)$  perche'  $3 = 1 + 2 \neq 1 \times 4 = 4$ ;

*Proprieta' antisimmetrica:* NO, perche'  $(5, 2) \preceq (3, 1)$  e  $(3, 1) \preceq (5, 2)$ .

*Determinare quali sono le coppie  $(c, d)$  tale che  $(0, 0) \preceq (c, d)$ :* Deve essere  $d = 0 + d = 0 \times c = 0$ , da cui segue  $d = 0$  e  $c$  arbitrario. In conclusione, tutte le coppie  $(c, 0)$  verificano la proprieta'  $(0, 0) \preceq (c, 0)$ .

*Determinare se l'insieme  $\{(a, b) : (a, b) \preceq (5, 7)\}$  ha un numero finito di elementi:* Deve essere  $a + 7 = 5b$ , ossia  $a = 5b - 7$ . Vi sono infinite coppie di naturali che verificano la relazione precedente:  $(2, 3), (3, 8), (4, 13), \dots$

3. Si provi che per ogni numero naturale  $n$  si ha  $7^n \equiv 1 \pmod{8}$  se  $n$  e' pari e  $7^n \equiv 7 \pmod{8}$  se  $n$  e' dispari.
4. Si provi che, se  $G$  e' un grafo con almeno due vertici, allora  $G$  ha almeno due vertici con lo stesso grado.