Prova Scritta di Strutture Discrete con Soluzione
2 Luglio 2009

1. Dimostrare che
$$n! \leq n^n \leq (n!)^2$$
per ogni $n \in \mathbb{N}$ con $n \geq 1$.

   Soluzione: Prima proviamo per induzione che $n! \leq n^n$. Base dell'induzione $n = 1$: $1 = 1! = 1^1$. Supponiamo per ipotesi d'induzione che la diseguaglianza sia vera per n e proviamola per $n + 1$.

$$\begin{array}{rcll} (n+1)! & = & (n+1) \times n! & \\ & \leq & (n+1) \times n^n & \text{per ipotesi d'induzione} \\ & \leq & (n+1) \times (n+1)^n & \text{perché } n < n+1 \\ & = & (n+1)^{n+1} & \end{array}$$

   Abbiamo quindi dimostrato la prima diseguaglianza. Ora passiamo alla seconda. Possiamo scrivere

$$\begin{array}{rcl} (n!)^2 & = & n! \times n! \\ & = & \big(1 \times 2 \times 3 \times \cdots \times (n-1) \times n\big) \times \big(n \times (n-1) \times \cdots \times 3 \times 2 \times 1\big) \\ & = & (1 \times n) \times (2 \times (n-1)) \times (3 \times (n-2)) \times \cdots \times ((n-1) \times 2) \times (n \times 1) \\ & = & \prod_{k=1}^{n} k \times (n+1-k). \end{array}$$

   Rimane da provare che $k \times (n+1-k) \geq n$ per ogni $1 \leq k \leq n$. Infatti

$$k \times (n+1-k) = k \times (n-(k-1)) = kn - k(k-1) = n + n(k-1) - k(k-1) = n + (k-1)(n-k)$$

   Dal fatto che $(k-1)(n-k) \geq 0$ per ogni $1 \leq k \leq n$ otteniamo la conclusione.

2. Nell'insieme $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ si definisca, per ogni $(a, b), (c, d) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$, la relazione
$$(a, b) \preceq (c, d) \Leftrightarrow \frac{2^a 7^b}{2^c 7^d} \leq 1.$$
   Dire se

   (a) la relazione $\preceq$ è un ordinamento totale su $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$;

(b) l'applicazione $f : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, definita da $(a, b) \mapsto 2^a 7^b$, è iniettiva;

(c) l'applicazione $f : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ è un omomorfismo tra gli insiemi ordinati $(\mathbb{N} \times \mathbb{N}, \preceq)$ e $(\mathbb{N}, \leq)$.

Soluzione: Si ha $(a, b) \preceq (c, d)$ iff $2^a 7^b \leq 2^c 7^d$.

(a) Quindi le proprietà riflessiva e transitiva si ricavano dalle corrispondenti proprietà di $\leq$ su $\mathbb{N}$. Per la proprietà antisimmetrica supponiamo che $(a, b) \preceq (c, d)$ e che $(c, d) \preceq (a, b)$. Allora $2^a 7^b \leq 2^c 7^d$ e $2^c 7^d \leq 2^a 7^b$, da cui $2^a 7^b = 2^c 7^d$. Per il teorema fondamentale dell'aritmetica sulla scomposizione univoca in prodotti di numeri primi si ha $a = c$ e $b = d$.

L'ordinamento è totale perché, prese due coppie $(a, b), (c, d)$, si ha sempre $2^a 7^b \leq 2^c 7^d$ oppure $2^c 7^d \leq 2^a 7^b$. Quindi vale $(a, b) \preceq (c, d)$ oppure vale il viceversa.

(b) Se $f(a, b) = f(c, d)$ allora $2^a 7^b = 2^c 7^d$ e sempre dal teorema fondamentale dell'aritmetica sulla scomposizione univoca in prodotti di numeri primi si ha $a = c$ e $b = d$. Quindi $(a, b) = (c, d)$.

(c) Sia $(a, b) \preceq (c, d)$. Allora $f(a, b) = 2^a 7^b \leq 2^c 7^d = f(c, d)$.

3. Per quali valori di $n \in \mathbb{N}$ il grafo completo bipartito $K_{n,2n-1}$ risulta planare?

   Soluzione: Per il teorema di Kuratowski un grafo e planare se e solo se non contiene K_5 o $K_{3,3}$ come sottografi. Poiché un grafo bipartito non può contenere K_5, e $K_{n,m}$ contiene $K_{3,3}$ se e solo se $n, m \geq 3$, ne segue che $K_{n,2n-1}$ è planare se e solo se $n \leq 2$.

4. Dimostrare che ogni gruppo di ordine 4 è abeliano. Determinare due gruppi di ordine 4 tra loro non isomorfi.

   Soluzione: Sia $G = \{1, a, b, c\}$ un gruppo di ordine 4. Allora ab puo essere uguale ad 1 o a c. Nel primo caso b è l'inverso di a e dunque anche $ba = 1$; nel secondo caso b non è l'inverso di a e dunque anche $ba = c$. Analogamente per gli altri prodotti. Si conclude che $xy = yx$ per ogni $x, y \in G$. Pertanto G è abeliano. Siano poi $G = (Z/4Z, +)$ che è ciclico generato da 1, $G' = (Z/2Z \oplus Z/2Z, +)$. G e G' non possono essere isomorfi poiché in G' tutti gli elementi sommati 2 volte con se stessi danno l'identità $(0, 0)$, e dunque G' non è ciclico.