Matematica Discreta (Teoria dei grafi)
23 -06-2013

Cognome e nome :
Numero di Matricola:

Es.1 E' vero o falso che se un grafo G con n vertici ha n-1 lati e ogni sua componente connessa è un albero, allora G è connesso e dunque è un albero?

Es.2 Si costruisca, se possibile, un grafo con 5 vertici e 6 lati che non contenga un 3-ciclo.

Es.3 Sia $G=(V,E)$ un grafo, e $\overline{G}=(V, \overline{E})$ il grafo complementare.

a) Si provi che, se $\delta(v)$ e $\overline{\delta}(v)$ sono rispettivamente il grado di v in G e in $\overline{G}$, si ha $\delta(v)+\overline{\delta}(v)+1=|V|$.

b) Si provi che $|E|+|\overline{E}|=\frac{1}{2}|V|(|V|-1)$

Soluzioni:

Es.1.E' vero. Infatti , detto n_i il numero dei vertici della i-esima componente connessa G_i di G, essendo G_i un albero, il numero dei lati di G_i è n_i-1. Dunque si ha $\sum_i (n_i-1)=n-1$, e pertanto necessariamente i=1, cioè G è connesso, e dunque è un albero.

Es.2 Sia $G=(V,E)$, ove $V=\{1,2,3,4,5\}$ $E=\{\{1,2\},\{2,3\},\{3,4\},\{4,1\},\{1,5\},\{5,3\}\}$.

Es.3 Si consideri il grafo $H=(V, E\cup\overline{E})$. a) Per definizione di grafo complementare, posto $\delta_H(v)$ il grado di $v\in V$ si ha $\delta_H(v)=\delta(v)+\overline{\delta}(v)=|V|-1$, da cui la formula richiesta. b) Il grafo $H=(V, E\cup\overline{E})$ non è altro che il grafo completo il cui insieme dei vertici è V. Dunque H è un grafo regolare di grado $|V|-1$, e per la nota formula che mette in relazione numero dei lati e somma dei gradi dei vertici, si ottiene la formula richiesta.