COMPITO DI MATEMATICA DISCRETA Parte I
2 Luglio 2009

1. Formalizzare la seguente frase: "x è un numero primo".

   Soluzione: x è un numero primo sse

$$(x \neq 0) \wedge (x \neq 1) \wedge (\forall y)(\forall z)(x = y \times z \rightarrow (y = x \vee z = x)).$$

2. Dimostrare per induzione, utilizzando la formula di Stifel $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$, che per ogni intero $n \geq 1$

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n.$$

   Soluzione: Base dell'induzione $n = 1$: $\binom{1}{0} + \binom{1}{1} = 1 + 1 = 2 = 2^1$. Supponiamo che l'identita' sia vera per n e dimostriamola per $n + 1$.

$$\begin{aligned}
2^{n+1} &= 2^n + 2^n \\
&= \textstyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} && \text{per ipotesi d'induzione} \\
&= \textstyle\sum_{k=1}^{n+1} \binom{n}{k-1} + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \\
&= \textstyle\binom{n}{n} + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k-1} + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} + \binom{n}{0} \\
&= \textstyle 1 + \sum_{k=1}^{n} (\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k}) + 1 \\
&= \textstyle 1 + \sum_{k=1}^{n} \binom{n+1}{k} + 1 && \text{per la formula di Stifel} \\
&= \textstyle\binom{n+1}{n+1} + \sum_{k=1}^{n} \binom{n+1}{k} + \binom{n+1}{0} \\
&= \textstyle\sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k}
\end{aligned}$$

3. Si dimostri che esistono infinite funzioni surgettive dall'insieme dei numeri naturali nell'insieme $\{0, 1, 2, 3\}$.

   Soluzione: Un insieme X è infinito se esiste una funzione iniettiva da $\mathbb{N}_0$ in X. Per ogni numero naturale n si consideri la seguente funzione $f_n : \mathbb{N}_0 \rightarrow \{0, 1, 2, 3\}$:

$$f_n(x) = \begin{cases} 3 & \text{se } x = n \\ x \; mod \; 3 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

   dove $x \; mod \; 3$ è uguale al resto della divisione di x per 3. Quindi, $x \; mod \; 3$ può essere uguale a 0 oppure 1 oppure 2. Se $n \neq k$ allora $f_n \neq f_k$ perché $f_n(n) = 3$ mentre $f_k(n) = n \; mod \; 3 < 3$.