COMPITO DI MATEMATICA DISCRETA Modulo I
22 Giugno 2009

1. Sia X un insieme. Dimostrare che per tutti i sottoinsiemi A, B, C di X vale la proprietà distributiva: $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$.

   Soluzione:

   Proviamo che $A \cup (B \cap C) \subseteq (A \cup B) \cap (A \cup C)$. Sia $x \in A \cup (B \cap C)$. Allora abbiamo due casi esaustivi:

   - Se $x \in A$ allora $x \in A \cup B$ e $x \in A \cup C$, da cui $x \in (A \cup B) \cap (A \cup C)$.
   - Se $x \notin A$ allora $x \in B \cap C$ (stante l'ipotesi $x \in A \cup (B \cap C)$), che implica $x \in B$ e $x \in C$. Da $x \in B$ segue che $x \in A \cup B$, mentre da $x \in C$ segue che $x \in A \cup C$. In conclusione, $x \in (A \cup B) \cap (A \cup C)$.

   Proviamo che $(A \cup B) \cap (A \cup C) \subseteq A \cup (B \cap C)$. Sia $x \in (A \cup B) \cap (A \cup C)$. Allora abbiamo $x \in A \cup B$ e $x \in A \cup C$. Analizziamo due casi.

   - Se $x \in A$ allora $x \in A \cup (B \cap C)$.
   - Se $x \notin A$ allora da $x \in A \cup B$ segue $x \in B$, mentre da $x \in A \cup C$ segue $x \in C$. In conclusione, $x \in B \cap C$, e quindi $x \in A \cup (B \cap C)$.

2. Dimostrare per induzione che per ogni intero $n \geq 3$ si ha
$$(2^3 + 2^4 + 2^5 + \cdots + 2^n) + 2^3 = 2^{n+1}.$$

   Soluzione: Base $n = 3$: $2^3 + 2^3 = 2 \times 2^3 = 2^4$. Supponiamo per ipotesi d'induzione che l'uguaglianza sia vera per n, cioè $(2^3 + 2^4 + 2^5 + \cdots + 2^n) + 2^3 = 2^{n+1}$. Dimostriamo l'uguaglianza per $n + 1$:

   $(2^3+2^4+2^5+\cdots+2^{n+1})+2^3 = ((2^3+2^4+2^5+\cdots+2^n)+2^3)+2^{n+1} = 2^{n+1}+2^{n+1} = 2^{n+2}$, come volevasi dimostrare.

3. Si dimostri la formula di Stifel: $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$.

   Soluzione 1: $\binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k} = (n-1)!/(k-1)!(n-1-k+1)! + (n-1)!/k!(n-1-k)! = (n-1)!/(k-1)!(n-k)! + (n-1)!/k!(n-1-k)! = (k \times (n-1)! + (n-k) \times (n-1)!)/k!(n-k)! = (k+n-k) \times (n-1)!/k!(n-k)! = n \times (n-1)!/k!(n-k)! = \binom{n}{k}$.

   Soluzione 2: $\binom{n}{k}$ è il numero dei k-sottoinsiemi di un n-insieme X. Fissiamo un elemento $a \in X$. Allora possiamo partizionare i k-sottoinsiemi di X in due classi: quelli che contengono a e quelli che non contengono a. Questi ultimi sono pari ai k-sottoinsiemi di $X - \{a\}$, cioè in totale $\binom{n-1}{k}$. Quelli che contengono a possono essere messi in corrispondenza biunivoca con i $k-1$-sottoinsiemi di $X - \{a\}$, che sono in totale $\binom{n-1}{k-1}$.