COMPITO DI MATEMATICA DISCRETA
15 Settembre 2011

1. Sia A un insieme di cardinalità n. Provare che la cardinalità dell'insieme dei k-sottoinsiemi di A è $\binom{n}{k}$.

   Soluzione: Calcoliamo prima la cardinalità dell'insieme delle stringhe di lunghezza k ad elementi nell'alfabeto A che non abbiano ripetizioni di caratteri. La cardinalità e' pari a quella dell'insieme delle funzioni iniettive dall'insieme $k = \{0, 1, ..., k-1\}$ nell'insieme A. Abbiamo n possibilità per il numero 0; $n-1$ possibilità per il numero 1 e così via. Quindi in totale, abbiamo $n \times (n-1) \times ... \times (n-k+1)$ possibilità.

   Infine, un sottoinsieme $X = \{a_1, \dots, a_k\}$ di A con k elementi corrisponde alle $k!$ funzioni iniettive $f : k \to A$ il cui codominio coincide con X. Quindi in totale, abbiamo $n \times (n-1) \times ... \times (n-k+1)/k! = \binom{n}{k}$ k-sottoinsiemi.

2. Provare che, per ogni intero $n \geq 1$, $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n$.

   Soluzione: 2^n e' la cardinalità dell'insieme $\mathcal{P}(A)$ delle parti di A, perche' ogni sottoinsieme X di A e' univocamente determinato dalla funzione caratteristica $f_X : A \to \{0, 1\}$ tale che $f_X(y) = 1$ se, e solo se, $y \in X$. Quindi, $\mathcal{P}(A)$ ha la stessa cardinalità dell'insieme delle funzioni da A in $\{0, 1\}$, che e' pari a 2^n. Infine, $|\mathcal{P}(A)| = \sum_{k=0}^{n} |\mathcal{P}_k(A)|$, dove $\mathcal{P}_k(A)$ e' l'insieme dei k-sottoinsiemi di A. Dall'esercizio 1 ricaviamo il risultato.

3. Si dimostri che esistono infinite funzioni surgettive dall'insieme $\mathbb{N}_0$ dei numeri naturali nell'insieme $\{0, 1\}$.

   Soluzione: Sia c un numero naturale. Definiamo la funzione $f_c : \mathbb{N}_0 \to \{0, 1\}$ tale che $f_c(x) = 0$ se, e solo se $x = c$. La funzione f_c e' surgettiva perche' $f_c(c) = 0$ e $f_c(x) = 1$ per ogni $x \neq c$. Infine, abbiamo infinite funzioni f_c tutte distinte (perche' $f^{-1}(0) = \{c\}$) al variare di $c \in \mathbb{N}_0$.

4. Si trovino tutte le soluzioni delle seguenti congruenze:

   $$a)\ 2x \equiv 3 \pmod 4; \quad b)\ 3x \equiv 2 \pmod 4; \quad c)\ 6x \equiv 2 \pmod 4.$$

5. Si determini il numero cromatico del grafo $G = (V, E)$, ove $V = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$ e $E = \{\{i, j\} : i, j \in V, i + j \text{ e' dispari}\}$.