

## SOLUZIONE COMPITO DI CALCOLABILITÀ 25 GENNAIO 2011

Si prega di giustificare accuratamente tutte le risposte.

1. Si definisca per ricorsione primitiva la funzione  $f(x, y) = 2^{x+y}$ . Si trovino poi le funzioni  $g$  ed  $h$  tali che  $f = \text{recprim}(g, h)$ .

**Soluzione:**

$$f(x, 0) = 2^x; \quad f(x, y + 1) = 2^{x+y+1} = 2 \times 2^{x+y} = 2 \times f(x, y)$$

Quindi,  $g(x) = 2^x$  e  $h(x, y, z) = 2 \times z$ .

2. Sia  $I = \{x : \phi_x(3) = 5\}$ . Quali teoremi di Rice si possono applicare ad  $I$  ed al complementare di  $I$ ?

**Soluzione:**

- $I$  rispetta le funzioni: Se  $x \in I$  e  $\phi_x = \phi_y$  allora  $\phi_y(3) = \phi_x(3) = 5$ . Quest'ultima uguaglianza vale perché  $x \in I$ .
- $I \neq \emptyset$ : gli indici dei programmi che calcolano la funzione  $f$ , definita  $f(x) = 5$  per ogni naturale  $x$ , appartengono ad  $I$ .
- $I \neq N$ : gli indici dei programmi che calcolano la funzione  $f$ , definita da  $f(x) = 0$  per ogni naturale  $x$ , appartengono al complementare di  $I$ .
- Primo teorema di Rice: Dal fatto che  $I$  rispetta le funzioni e  $I \neq \emptyset, N$  segue che  $I$  ed il suo complementare non sono decidibili. il complementare di  $I$  non è semidecidibile perché gli indici dei programmi che calcolano la funzione vuota  $f_\emptyset$  stanno nel complementare di  $I$ .
- Secondo teorema di Rice per  $I$ : Non si può applicare perché  $I$  è un insieme semidecidibile.
- Secondo teorema di Rice per  $\bar{I}$ : si può applicare perché  $\{x : \phi_x = f_\emptyset\} \subseteq \bar{I}$ ,  $f_\emptyset < g$ , dove  $g(x) = 5$  per ogni  $x$ , e  $\{x : \phi_x = g\} \subseteq I$ .
- Terzo teorema di Rice per  $I$ : non si può applicare perché  $I$  è semidecidibile.
- Terzo teorema di Rice per  $\bar{I}$ : non si può applicare perché gli indici dei programmi che calcolano la funzione vuota  $f_\emptyset$  stanno in  $\bar{I}$ . Se  $\{x : \phi_x = g\} \subseteq \bar{I}$  con  $g$  calcolabile di dominio infinito, non tutte le approssimazioni finite di  $g$  hanno indici in  $I$ . Considera per esempio la funzione vuota.

3. Si consideri la seguente definizione ricorsiva:

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{se } x = 0; \\ f(x+1) + 1, & \text{se } x \text{ è dispari}; \\ f(x-1) + 1, & \text{se } x \neq 0 \text{ è pari.} \end{cases}$$

Si determini il minimo punto fisso della precedente definizione ricorsiva verificando che il funzionale associato è ricorsivo.

**Soluzione:** Si definisca la seguente funzione  $h$ :

$$h(x, y) = \begin{cases} 1, & \text{se } x = 0; \\ \phi_y(x+1) + 1, & \text{se } x \text{ è dispari}; \\ \phi_y(x-1) + 1, & \text{se } x \neq 0 \text{ è pari.} \end{cases}$$

$h$  è calcolabile (lo si provi come esercizio), quindi possiamo applicare il teorema del parametro. Esiste  $s : N \rightarrow N$  calcolabile totale tale che

$$\phi_{s(y)}(x) = h(x, y) = \begin{cases} 1, & \text{se } x = 0; \\ \phi_y(x+1) + 1, & \text{se } x \text{ è dispari}; \\ \phi_y(x-1) + 1, & \text{se } x \neq 0 \text{ è pari.} \end{cases}$$

La funzione  $s$  è estensionale per cui il funzionale  $\tau$ , definito da

$$\tau(\phi_y) = \phi_{s(y)},$$

verifica le ipotesi del primo teorema di ricorsione.

La procedura per il calcolo del minimo punto fisso del funzionale:

$$f_0 = f_0$$

$f_1 = \tau(f_0)$  è definita come segue:

$$f_1(x) = \begin{cases} 1, & \text{se } x = 0; \\ f_0(x+1) + 1, & \text{se } x \text{ è dispari}; \\ f_0(x-1) + 1, & \text{se } x \neq 0 \text{ è pari.} \end{cases} = \begin{cases} 1, & \text{se } x = 0; \\ \uparrow, & \text{se } x \neq 0 \end{cases}$$

perché le espressioni  $f_0(x+1) + 1$  e  $f_0(x-1) + 1$  sono sempre indefinite.  $f_2 = \tau(f_1)$  è definita come segue:

$$f_2(x) = \begin{cases} 1, & \text{se } x = 0; \\ f_1(x+1) + 1, & \text{se } x \text{ è dispari}; \\ f_1(x-1) + 1, & \text{se } x \neq 0 \text{ è pari.} \end{cases} = \begin{cases} 1, & \text{se } x = 0; \\ \uparrow, & \text{se } x \neq 0 \end{cases}$$

perché l'espressione  $f_1(x+1) + 1$  è definita soltanto nel caso in cui  $x+1 = 0$ . Questo è impossibile per  $x$  dispari. Inoltre, l'espressione  $f_1(x-1) + 1$  è definita soltanto nel caso in cui  $x-1 = 0$ . Questo è impossibile per  $x$  pari diverso da 0.

Il minimo punto fisso coincide con  $f_1$  perché  $f_2 = f_1$ .