

COMPITINO E COMPITO DI MATEMATICA DISCRETA MODULO I
SOLUZIONE
15 Febbraio 2010

1. Sia X un insieme. Dimostrare che per tutti i sottoinsiemi A, B, C di X vale la seguente proprietà: $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$.

Soluzione: Proviamo prima che $A \cap (B \cup C) \subseteq (A \cap B) \cup (A \cap C)$. Sia $x \in A \cap (B \cup C)$. Allora $x \in A$ e $x \in B \cup C$. Si hanno due casi:

(1) $x \in A$ e $x \in B$. Allora $x \in A \cap B$ e quindi x appartiene ad ogni sovrainsieme di $A \cap B$, in particolare appartiene a $(A \cap B) \cup (A \cap C)$.

(2) $x \in A$ e $x \in C$. Allora $x \in A \cap C$ e quindi x appartiene ad ogni sovrainsieme di $A \cap C$, in particolare appartiene a $(A \cap B) \cup (A \cap C)$.

Proviamo ora che $(A \cap B) \cup (A \cap C) \subseteq A \cap (B \cup C)$. Sia $x \in (A \cap B) \cup (A \cap C)$. Si hanno due casi:

(1) $x \in (A \cap B)$. Allora $x \in A$ e $x \in B$. Quindi x appartiene ad A e ad ogni sovrainsieme di B , in particolare $x \in A$ e $x \in B \cup C$. In conclusione, $x \in A \cap (B \cup C)$.

(2) $x \in (A \cap C)$. Allora $x \in A$ e $x \in C$. Quindi x appartiene ad A e ad ogni sovrainsieme di C , in particolare $x \in A$ e $x \in B \cup C$. In conclusione, $x \in A \cap (B \cup C)$.

2. Definire la seguente relazione sui numeri naturali:

$x R y$ sse x e y sono primi tra di loro (i.e., il massimo comun divisore di x e y è 1).

Determinare quali proprietà (riflessiva, simmetrica, transitiva, antisimmetrica) sono verificate dalla relazione R . Nel caso in cui R non verifichi una data proprietà si mostri un controesempio.

Soluzione:

Proprietà riflessiva: $\forall x(xRx)$. Non è verificata perchè $5 \not R 5$ in quanto $\text{MCD}(5,5) = 5$.

Proprietà simmetrica: $\forall xy(xRy \rightarrow yRx)$. Ricordiamo la seguente proprietà del massimo comun divisore: $\text{MCD}(x,y) = \text{MCD}(y,x)$. Allora, da xRy , i.e., $\text{MCD}(x,y) = 1$, segue che $\text{MCD}(y,x) = 1$, cioè yRx .

Proprietà transitiva: $\forall xyz(xRy \wedge yRz \rightarrow xRz)$. Controesempio: $3R5$ e $5R3$, ma non vale $3R3$.

Proprietà antisimmetrica: $\forall xy(xRy \wedge yRx \rightarrow x = y)$. Non vale perchè vale la simmetrica. Comunque, il seguente è un controesempio: $3R5$, $5R3$, ma $3 \neq 5$.

3. Dimostrare per induzione che $\sum_{1 \leq k \leq n} (2k - 1) = n^2$ per ogni numero naturale $n \geq 1$.

Soluzione: Caso base $n = 1$. $\sum_{1 \leq k \leq 1} (2k - 1) = 2 \times 1 - 1 = 1 = 1^2$.

Supponiamo, per ipotesi d'induzione, che $\sum_{1 \leq k \leq n} (2k - 1) = n^2$. Proviamo la proprietà per $n + 1$.

$\sum_{1 \leq k \leq n+1} (2k - 1) = \sum_{1 \leq k \leq n} (2k - 1) + (2(n+1) - 1) = n^2 + (2(n+1) - 1) = n^2 + 2n + 2 - 1 = n^2 + 2n + 1 = (n+1)^2$.

4. Verificare se la funzione $f : \mathbb{N}_0 \rightarrow \mathbb{N}_0$, definita da

$$f(x) = 2^x + x$$

è iniettiva e/o surgettiva.

Soluzione: La funzione f è iniettiva se verifica la seguente proprietà: $\forall xy(x \neq y \rightarrow f(x) \neq f(y))$.

Sia $x \neq y$. Allora $x < y$ oppure $y < x$. Senza perdita di generalità supponiamo che $x < y$. Sia $y = x + k$ con $k \geq 1$. Abbiamo $f(y) = 2^y + y = 2^{x+k} + x + k = 2^x 2^k + x + k > 2^x 2^k + x > 2^x + x = f(x)$ perchè per $k \geq 1$ si ha $2^x 2^k > 2^x$. In conclusione, $f(y) > f(x)$, che implica $f(x) \neq f(y)$. Quindi f è iniettiva.

La funzione f è surgettiva se verifica la seguente proprietà: $\forall y \exists x (f(x) = y)$.

Proviamo che non esiste $x \geq 0$ tale che $f(x) = 2$. Supponiamo per assurdo che $2 = 2^x + x$ per un certo x . Allora $2 - x = 2^x$, da cui segue $2 - x > 0$, perchè $2^x \geq 1$ per $x \geq 0$. Quindi $x = 0$ oppure $x = 1$. Ma $f(0) = 1$ e $f(1) = 3$. In conclusione, $\neg \exists x (f(x) = 2)$ e la funzione f non è surgettiva.

5. Sia A un insieme finito di cardinalità n . Si determini il numero di sottoinsiemi di A di cardinalità $k \leq n$. Giustificare la risposta.

Soluzione: La risposta è $\binom{n}{k}$. La giustificazione si trova nelle note del corso.