Soluzioni degli esercizi

Es. Sia $\boldsymbol{S}$ l'insieme dei numeri interi appartenenti alla classe di congruenza $[1]_4$

a) Si provi che $\boldsymbol{S}$ e' chiuso rispetto al prodotto.
b) E' vero o falso che i numeri primi che compaiono nella fattorizzazione unica in potenze di numeri primi di ogni elemento di $\boldsymbol{S}$ e' costituita da numeri primi appartenenti ad $\boldsymbol{S}$?

Soluzione. c) se a e b sono due elementi di $\boldsymbol{S}$ si ha $a=1+4h$, $b=1+4k$ per opportuni numeri interi h e k. Dunque $ab=1+4k+4h+16hk\in\boldsymbol{S}$.

d) E' falso; infatti ad esempio $9=3^2$ ma $9\in\boldsymbol{S}$, mentre $3\notin\boldsymbol{S}$.

Es La sottostante tabella fornisce le distanze tra le sei localita' A,B,C,D,E.F in Km.

	A	B	C	D	E	F
A	-	78	56	73	71	114
B	78	-	132	121	135	96
C	56	132	-	64	85	154
D	73	121	64	-	144	116
E	71	135	85	144	-	185
F	114	96	154	116	185	-

Si usi l'algoritmo MST per calcolare un percorso di minima lunghezza che tocchi tutte le sei localita'.

Soluzione. Dobbiamo trovare un albero ricoprente minimo per il grafo pesato completo i cui vertici sono A, B, C, D, E e i pesi dei lati sono dati dalla distanza tra i vertici che rappresentano le localita' in Km. L'algoritmo da usare prevede di partire da qualsiasi vertice e, tra i vertici adiacenti, scegliere quello tale che il lato corrispondente abbia il peso piu' basso. Il passo intermedio e' cosi' definito; si considera l'albero parziale costruito fino a quel punto e si sceglie il lato di peso minimo tra quelli che aggiungono un nuovo vertice all'albero parziale. Nel nostro caso applicando questo algorimo si ottiene l'albero i cui lati sono {E,A}, {A,B},{B,F},{A,C},{C,D}, che ha un peso totale di 365 (Km).

Es. Sia G un grafo con n vertici tale che G sia isomorfo al suo grafo complementare $\overline{G}$.

a) Quanti lati ha G?
b) Si deduca che 4 divide $n(n-1)$.
c) Si deduca che $n=4h$ o $n=4h+1$ con h intero non negativo.
d) Si costruisca un esempio di un grafo G con 4 vertici tale che G e $\overline{G}$ siano isomorfi.

Soluzione. e) Poiche' il grafo completo con n vertici ha $\frac{n(n-1)}{2}$ lati, dato che G e $\overline{G}$ devono avere lo stesso numero di lati, G (e $\overline{G}$) hanno $\frac{n(n-1)}{4}$ lati.

f) da e) segue che $\frac{n(n-1)}{4}$ e' un numero naturale e dunque $n(n-1)$ deve essere divisibile per 4.

g) Poiche' n ed n-1 sono coprimi, allora necessariamente si ha che $4|n$ oppure $4|n-1$.
h) $G=(V,E)$, ove $V=\{1,2,3,4\}$, $E=\{\{1,2\},\{2,3\},\{3,4\}\}$. Allora $\overline{G}=\{V, E'\}$, ove $E'=\{\{1,3\},\{2,4\}.\{1,4\}\}$ che e' evidentemente isomorfo a G.

<u>Es.</u> Si provi che un grafo bipartito con un numero dispari di vertici non possiede un ciclo Hamiltoniano.
Soluzione. Poiche' un ciclo Hamiltoniano passa una ed una sola volta per ogni vertice, e i vertici sono in numero dispari, il ciclo avrebbe un numero dispari di lati. Ma cio' non e' possibile, dato che un grafo e' bipartito se e solo se non contiene cicli di lunghezza dispari.

<u>Es.</u> Un albero T ha 3 vertici di grado 3 e 4 vertici di grado 2. I rimanenti vertici hanno tutti grado 1. Quanti sono i vertici di grado 1? Quanti lati ha T?
Soluzione. Ricordiamo che , detto n il numero dei vertici, un albero ha n-1 lati. Inoltre la formula generale per i grafi $\sum_{v\in V}\delta(v) = 2|E|$ implica, nel nostro caso, $9+8+(n-7)=2(n-1)$, da cui $n+10=2n-2$, da cui $n=12$. Pertanto vi sono 5 vertici di grado 1, e T ha 11 lati.

<u>Es.</u> Per quali $n\in \mathbf{N}$ il grafo completo bipartito $K_{n,,2n-1}$ risulta planare?
Soluzione. Per il teorema di Kuratowski un grafo e' planare se e solo se non contiene K_5 o $K_{3,,3}$ come sottografi. Poiche' un grafo bipartito non puo' contenere K_5, e $K_{n,,2n-1}$ contiene $K_{3,,3}$ se e solo se $n\geq 3$, ne segue che $K_{n,,2n-1}$ e' planare se e solo se $n\leq 2$.

<u>Es.</u> Dimostrare che ogni gruppo d'ordine 4 e' abeliano.
Determinare due gruppi d'ordine 4 non isomorfi
Soluzione. Sia $G=\{1,a,b,c\}$ un gruppo di ordine 4. Allora ab puo' essere uguale ad 1 o a c. Nel primo caso b e' l'inverso di a e dunque anche $ba=1$; nel secondo caso b non e' l'inverso di a e dunque anche $ba=c$. Analogamente per gli altri prodotti. Si conclude che $xy=yx\forall x,y\in G$. Pertanto G e' abeliano. Siano poi $G=(\mathbf{Z/4Z},+)$ che e' ciclico e generato da 1, $G'=(Z/2Z\oplus Z/2Z,+)$. G e G' non possono essere isomorfi poiche' in G' tutti gli elementi sommati 2 volte con se stessi danno l'identita' (0,0), e dunque G' non e' ciclico.