

Soluzioni degli esercizi

Es. Sia S l'insieme dei numeri interi appartenenti alla classe di congruenza $[1]_4$

- a) Si provi che S e' chiuso rispetto al prodotto.
- b) E' vero o falso che i numeri primi che compaiono nella fattorizzazione unica in potenze di numeri primi di ogni elemento di S e' costituita da numeri primi appartenenti ad S ?

Soluzione. c) se a e b sono due elementi di S si ha $a=1+4h$, $b=1+4k$ per opportuni numeri interi h e k . Dunque $ab=1+4k+4h+16hk \in S$.

d) E' falso; infatti ad esempio $9=3^2$ ma $9 \in S$, mentre $3 \notin S$.

Es La sottostante tabella fornisce le distanze tra le sei localita' A,B,C,D,E,F in Km.

	A	B	C	D	E	F
A	-	78	56	73	71	114
B	78	-	132	121	135	96
C	56	132	-	64	85	154
D	73	121	64	-	144	116
E	71	135	85	144	-	185
F	114	96	154	116	185	-

Si usi l'algoritmo MST per calcolare un percorso di minima lunghezza che tocchi tutte le sei localita'.

Soluzione. Dobbiamo trovare un albero ricoprente minimo per il grafo pesato completo i cui vertici sono A, B, C, D, E e i pesi dei lati sono dati dalla distanza tra i vertici che rappresentano le localita' in Km. L'algoritmo da usare prevede di partire da qualsiasi vertice e, tra i vertici adiacenti, scegliere quello tale che il lato corrispondente abbia il peso piu' basso. Il passo intermedio e' cosi' definito; si considera l'albero parziale costruito fino a quel punto e si sceglie il lato di peso minimo tra quelli che aggiungono un nuovo vertice all'albero parziale. Nel nostro caso applicando questo algoritmo si ottiene l'albero i cui lati sono $\{E,A\}$, $\{A,B\}$, $\{B,F\}$, $\{A,C\}$, $\{C,D\}$, che ha un peso totale di 365 (Km).

Es. Sia G un grafo con n vertici tale che G sia isomorfo al suo grafo complementare \bar{G} .

- a) Quanti lati ha G ?
- b) Si deduca che 4 divide $n(n-1)$.
- c) Si deduca che $n=4h$ o $n=4h+1$ con h intero non negativo.
- d) Si costruisca un esempio di un grafo G con 4 vertici tale che G e \bar{G} siano isomorfi.

Soluzione. e) Poiche' il grafo completo con n vertici ha $\frac{n(n-1)}{2}$ lati, dato che G e \bar{G} devono avere lo stesso numero di lati, G (e \bar{G}) hanno $\frac{n(n-1)}{4}$ lati.

- f) da e) segue che $\frac{n(n-1)}{4}$ e' un numero naturale e dunque $n(n-1)$ deve essere divisibile per 4.

- g) Poiche' n ed $n-1$ sono coprimi, allora necessariamente si ha che $4|n$ oppure $4|n-1$.
- h) $G=(V,E)$, ove $V=\{1,2,3,4\}$, $E=\{\{1,2\},\{2,3\},\{3,4\}\}$. Allora $\overline{G}=\{V, E'\}$, ove $E'=\{\{1,3\},\{2,4\},\{1,4\}\}$ che e' evidentemente isomorfo a G .

Es. Si provi che un grafo bipartito con un numero dispari di vertici non possiede un ciclo Hamiltoniano.

Soluzione. Poiche' un ciclo Hamiltoniano passa una ed una sola volta per ogni vertice, e i vertici sono in numero dispari, il ciclo avrebbe un numero dispari di lati. Ma cio' non e' possibile, dato che un grafo e' bipartito se e solo se non contiene cicli di lunghezza dispari.

Es. Un albero T ha 3 vertici di grado 3 e 4 vertici di grado 2. I rimanenti vertici hanno tutti grado 1. Quanti sono i vertici di grado 1? Quanti lati ha T ?

Soluzione. Ricordiamo che, detto n il numero dei vertici, un albero ha $n-1$ lati. Inoltre la formula generale per i grafi $\sum_{v \in V} \delta(v) = 2|E|$ implica, nel nostro caso,

$9+8+(n-7)=2(n-1)$, da cui $n+10=2n-2$, da cui $n=12$. Pertanto vi sono 5 vertici di grado 1, e T ha 11 lati.

Es. Per quali $n \in \mathbb{N}$ il grafo completo bipartito $K_{n,2n-1}$ risulta planare?

Soluzione. Per il teorema di Kuratowski un grafo e' planare se e solo se non contiene K_5 o $K_{3,3}$ come sottografi. Poiche' un grafo bipartito non puo' contenere K_5 , e $K_{n,2n-1}$ contiene $K_{3,3}$ se e solo se $n \geq 3$, ne segue che $K_{n,2n-1}$ e' planare se e solo se $n \leq 2$.

Es. Dimostrare che ogni gruppo d'ordine 4 e' abeliano.

Determinare due gruppi d'ordine 4 non isomorfi

Soluzione. Sia $G=\{1,a,b,c\}$ un gruppo di ordine 4. Allora ab puo' essere uguale ad 1 o a c . Nel primo caso b e' l'inverso di a e dunque anche $ba=1$; nel secondo caso b non e' l'inverso di a e dunque anche $ba=c$. Analogamente per gli altri prodotti. Si conclude che $xy=yx \forall x,y \in G$. Pertanto G e' abeliano. Siano poi $G=(\mathbb{Z}/4\mathbb{Z},+)$ che e' ciclico e generato da 1, $G'=(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/2\mathbb{Z},+)$. G e G' non possono essere isomorfi poiche' in G' tutti gli elementi sommati 2 volte con se stessi danno l'identita' (0,0), e dunque G' non e' ciclico.