Soluzioni degli esercizi

Es. Si dimostri che il numero naturale
n=123456789123456789123456789123456789123456789^{11}-5 e' un multiplo di 11.
Soluzione: innanzitutto 11 e' un numero primo, e dunque, per il teorema di Fermat ($a^p \equiv a \bmod p$ $\forall$ numero intero a e $\forall$ numero primo p), n e' multiplo di 11 se e solo se m=123456789123456789123456789123456789123456789$\equiv$5 mod. 11. Sappiamo che $10^r \equiv (-1)^r$ mod. 11, e dunque ogni numero naturale scritto in base 10 e' congruo mod. 11alla somma delle sue cifre con segno alterno +,- a seconda che la cifra sia nella posizione delle potenze pari o dispari di 10. In m la sequenza 123456789 e' ripetuta 5 volte. Pertanto la somma delle cifre di m con segno alterno+ e – da come risultato 5. Ne segue che $m \equiv 5$ mod. 11, come si voleva.

Es. Siano m ed n due numeri interi. Si provi che se la divisione di m per n in $\mathbf{Z}$ da come resto il numero 1, allora m ed n sono coprimi.
E' vero il viceversa? (Nel caso non lo sia si dia un controesempio).
Soluzione: Se $m= nq+1$, allora $1=m- nq$, e dunque se un numero intero divide sia m che n, deve dividere 1, e pertanto gli unici divisori comuni di m ed n sono +1 e –1, dunque m ed n sono coprimi. Il viceversa non e' vero; ad esempio 5 e 3 sono coprimi ma il resto della divisione di 5 per 3 e' 2.

Es. Dato l'insieme $V=\{1,2,3,4,5,\ldots.n\}$ e due permutazioni σ e τ di V, si considerino i seguenti due grafi :
$G=(V, E)$, ove $E= \{\{\sigma(i), \sigma(j)\}|\ i\neq j \in V\}$,
$G_1=(V, E_1)$, ove $E_1=\{\{\tau(i), \tau(j)\}|\ i\neq j \in V\}$.

a) Quanti lati hanno G e G_1?
b) Che grado ha il vertice i in G e in G_1 $\forall$ $i\in V$?
c) Si dica se G e G_1 sono isomorfi, costruendo un isomorfismo tra G e G_1 nel caso affermativo o trovando un controesempio nel caso opposto.

Soluzione: a) poiche' σ e τ sono funzioni biiettive, si ha $V=\{\sigma(i)|\ i\in V\}$ e $V=\{\tau(i)|\ i\in V\}$. Inoltre $i\neq j \Leftrightarrow \sigma(i)\neq\sigma(j) \Leftrightarrow \tau(i)\neq\tau(j)$ e dunque E ed E_1 sono ambedue l'insieme dei sottoinsiemi di V con due elementi. Cio' significa che G e G_1 sono lo stesso grafo completo con n vertici e dunque $n(n-1)/2$ lati.
b) Poiche' i grafi in oggetto sono completi, con n vertici, il grado di ogni vertice e' n-1.
c) Per quanto visto in a) G e G_1 sono lo stesso grafo, in particolare l'identita' di V e' un isomorfismo tra G e G_1.

Es. Si consideri il grafo bipartito $G=(X\cup Y, E)$, ove $X=\{1,2,3,4\}$, $Y=\{5,6,7,8,9,10\}$, $E=\{\{x,y\}|\ x\in X, y \in Y,\ y\text{-}x$ e' pari$\}$; si provi che in G vale la condizione di Hall ($|J(A)|\geq|A|$ $\forall$ $A\subseteq X$ e si costruisca un matching completo per G.
Soluzione: Se $\emptyset\neq A\subseteq X$, $J(A)\supseteq A+4=\{a+4|a\in A\}$, e $|A|=|A+4|$. Pertanto vale la condizione di Hall. Un Matching completo per G e' $\{\{1,5\},\{2,6\},\{3,7\},\{4,8\}\}$.

Es. Si determini il numero cromatico del grafo $G=(V,E)$, ove $V=\{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10\}$, $E=\{\{i,j\}|\ i,j \in V$ e $i+j$ e' dispari$\}$.
Soluzione: Poniamo $X=\{2,4,6,8,10\}$, $Y=\{1,3,5,7,9\}$. Allora $V=X\cup Y$ e due vertici di X o due vertici di Y non sono mai adiacenti. Pertanto G e' bipartito, dunque il suo numero cromatico e' 2.

<u>Es</u> Sia $V= \{a, b, c, d, e\}$ l' insieme dei vertici dei grafi G, H, K, descritti dalle seguenti tabelle di adiacenza

G:

a	b	c	d	e
b	a	b	a	a
d	c	d	c	b
e	e		e	d

H:

a	b	c	d	e
b	a	b	c	a
e	c	d	e	d

K:

a	b	c	d	e
b	a	a	c	a
c	c	b	e	b
e	e	d		d

Si verifichi se H e K sono isomorfi ad un sottografo di G.
<u>Soluzione</u>: H e' un sottografo di G perche' la tabella di adiacenza di H e' parte della tabella di adiacenza di G. Per quanto riguarda K, si puo' osservare che G e' isomorfo a K e l'isomorfismo e' indotto dall'applicazione $\varphi: V \rightarrow V$ definita ponendo $\varphi(a)= a$, $\varphi(b)=c$, $\varphi(c)= d$, $\varphi(d)= e$, $\varphi(e)= b$. Dunque sia H che K sono isomorfi ad un sottografo di G.