A.A. 2012-2013 Mestre, 16-05-2013

Cognome e nome (in stampatello):……………………………………

Numero di Matricola:…………………………………………………..

Prova Parziale di Matematica Discreta II parte (Algebra Lineare) del 16-05-2013

Es. 1 Sia V uno spazio vettoriale sul campo $\boldsymbol{R}$ dei numeri reali e $\varphi: V \to V$ una applicazione lineare la cui matrice associata rispetto a una base fissata e'

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

a) Si provi che φ e' biiettiva.
b) Si calcoli la matrice associata all'applicazione inversa $\varphi^{-1}: V \to V$ rispetto alla medesima base utilizzando il metodo di riduzione a scala per righe della matrice (A|I) ove I è la matrice identica 3x3.

Es. 2 Si risolva il sistema di equazioni lineari a coefficienti in $\boldsymbol{R}$:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & 3 \\ 3 & -3 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Es. 3 Sia $\varphi: \boldsymbol{R}^2 \to \boldsymbol{R}^2$ l'applicazione lineare dallo spazio vettoriale $\boldsymbol{R}^2$ in se, la cui matrice associata rispetto alla base canonica è $M = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$. Si calcolino gli autovalori di φ e si trovi una base B di $\boldsymbol{R}^2$ tale che la matrice associata a φ rispetto alla base B sia una matrice diagonale.

Soluzioni degli esercizi

Es. 1 a) φ e' biiettiva se e solo se la matrice associata a φ rispetto ad una base qualsiasi di V è invertibile. Inoltre A è invertibile se e solo se $\det(A) \neq 0$. Nel nostro caso det.(A)=2, dunque φ è biiettiva.

b) La matrice associata a $\varphi^{-1}: V \to V$ rispetto alla stessa base è A^{-1}, la matrice inversa di *A.* Infatti la matrice associata a $\varphi\varphi^{-1} = \varphi^{-1}\varphi = i : V \to V$ ove i è l'applicazione identica di V in se stesso, è la matrice identica, e nello stesso tempo è il prodotto righe per colonne $AB=BA$, ove B è la matrice associata a φ^{-1} rispetto alla stessa base di *V.* Pertanto $B= A^{-1}$. Calcolando la forma a scala per righe della matrice $(A|I)$ ove I è la matrice identica 3x3, si otterrà la matrice $(I|A^{-1})$(Vedi ad esempio Artin, Algebra, cor. 2.21 pag. 19). La forma a scala per righe di $(A|I)$, dopo facili calcoli, risulta essere

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

dunque la matrice associata a φ^{-1} rispetto alla medesima base è

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Es. 2 Poniamo $A=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & 3 \\ 3 & -3 & 3 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ .La forma a scala per righe della matrice completa $(A|B)$ associata al sistema, dopo gli usuali calcoli risulta essere

$$(A'|B') = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{5}{3} & 1 \\ 0 & 1 & \frac{2}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Sappiamo che le soluzioni del sistema la cui matrice completa è $(A'|B')$ sono le stesse del sistema originario. Per determinarle, basta dare un valore arbitrario t alle variabili corrispondenti alle colonne di A' che non contengono pivot, in questo caso la terza. Poniamo dunque $x_3 = t$, da cui si ricava subito $x_2 = -\frac{2}{3}t$, $x_1 = 1 - \frac{5}{3}t$. Pertanto l'insieme delle soluzioni è costituito da tutte le terne di numeri reali della forma $\left(1 - \frac{5}{3}t, -\frac{2}{3}t, t\right)$ $\forall t \in R$.

Es. 3 Il polinomio caratteristico di φ è $\lambda^2 - 6\lambda + 5$, le cui radici, con molteplicità 1, e cioè gli autovalori per φ sono 1 e 5. Poiché gli autospazi relativi hanno necessariamente dimensione 1, basterà trovare un autovettore relativo all'autovalore 1 e un autovettore relativo all'autovalore 5. Essi formeranno una base rispetto alla quale la matrice associata a φ sarà $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$. Per trovare tali autovettori, basterà trovare una soluzione non nulla per ciascuno dei due sistemi di equazioni lineari $\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. Si vede subito che una soluzione per il primo sistema è (1,-1), mentre per il secondo è (1,1). Dunque ((1,-1), (1,1)) è una base B di R^2 rispetto alla quale la matrice associata a φ sarà $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$.