# Matematica Discreta

Compitino Modulo I BBBBBBB
9 Gennaio 2013

Nome e Cognome:

Numero Matricola:

Giustificare ogni risposta.

## Esercizio 1

Si consideri la seguente relazione binaria $R$ sull'insieme dei professori del corso di laurea in informatica: $xRy$ se, e solamente se, $x$ e $y$ insegnano nello stesso corso (suddiviso in più moduli) e $x$ ha pubblicato un numero di articoli scientifici strettamente inferiore al numero di articoli scientifici pubblicati da $y$. Quali proprietà verifica la relazione $R$?

## Soluzione

Per semplificare i ragionamenti indichiamo con $Ar(x)$ il numero di articoli scientifici pubblicati da $x$.

1. La relazione binaria $R$ verifica la proprietà riflessiva se e solo se $xRx$ per ogni professore $x$ del corso di laurea in informatica. Troviamo un controesempio alla proprietà riflessiva. Salibra è un professore del corso di laurea in informatica. Allora Salibra banalmente insegna lo stesso corso di Salibra (!), ma $Ar(Salibra) < Ar(Salibra)$ è falso. Quindi è falso che $Salibra\ R\ Salibra$.

2. Proprietà Simmetrica: $\forall xy(xRy \to yRx)$. La proprietà simmetrica non vale. Ecco un controesempio. Siano Pinco e Pallino due professori tali che Pinco $R$ Pallino. Da quest'ultima condizione segue che Pinco e Pallino insegnano nello stesso corso e $Ar(Pinco) < Ar(Pallino)$. Se valesse la condizione inversa Pallino $R$ Pinco, allora $Ar(Pallino) < Ar(Pinco)$, che è impossibile.

3. Proprietà Transitiva: $\forall xyz(xRy \land yRz \to xRz)$. La proprietà transitiva vale. Dobbiamo quindi fare un ragionamento generale. Siano $x, y, z$ tre professori tali che $xRy$ e $yRz$. Allora tutti e tre i professori insegnano nello stesso corso. Inoltre sempre dall'ipotesi $xRy$ e $yRz$ segue che $Ar(x) < Ar(y)$ e $Ar(y) < Ar(z)$. Per la proprietà transitiva dell'ordinamento $<$ sui numeri naturali si ha che $Ar(x) < Ar(z)$. In conclusione, $x$ e $z$ insegnano nello stesso corso e $Ar(x) < Ar(z)$, cioè $xRz$.

4. Proprietà antisimmetrica: $\forall xy(xRy \land yRx \to x = y)$. La proprietà antisimmetrica vale. Proveremo che la premessa dell'implicazione è sempre falsa comunque scegliamo $x$ e $y$ tra i professori. Infatti, se $x, y$ sono due prof tali che $xRy$ e $yRx$, allora $x$ e $y$ insegnano nello stesso corso, ed inoltre $Ar(x) < Ar(y)$ e $Ar(y) < Ar(x)$. Queste due ultime condizioni sono impossibili tra di loro. Non esistono due numeri naturali $n, k$ tali che $n < k$ e $k < n$. Quindi è impossibile che contemporaneamente $xRy$ e $yRx$.

   Un'implicazione con premessa sempre falsa è vera. Basta controllare la tavola di verità dell'implicazione.

## Esercizio 2

In quanti modi si possono lanciare 10 palline indistinguibili in 20 contenitori distinti in maniera tale che ogni contenitore contenga al più una pallina?

## Soluzione

Le palline sono indistinguibili. Quindi sono come le palline da ping-pong bianche, tutte uguali. I contenitori sono tutti distinti (li possiamo considerare numerati da 1 a 20), quindi costituiscono un insieme di cardinalità 20. Immaginiamo di lanciare le 10 palline indistinguibili nei 20 contenitori. Alla fine del lancio, avremo 10 contenitori vuoti e 10 contenitori con una pallina. L'esito di un lancio delle 10 palline corrisponde quindi a selezionare un sottoinsieme di cardinalità 10 di un insieme di 20 elementi. In totale quindi abbiamo (20 su 10) (coefficiente binomiale) possibili esiti del lancio.

## Esercizio 3

Dimostrare per induzione che, per ogni $n \geq 4$, $2^n < n!$.

## Soluzione

Base dell'induzione: $2^4 = 16 < 4! = 24$. Ok.
Supponiamo per ipotesi d'induzione che $2^n < n!$. Dimostriamo la medesima disuguaglianza per $n + 1$.

$$2^{n+1} = 2 \times 2^n < 2 \times n! < (n+1) \times n! = (n+1)!.$$

La disuguaglianza $2 \times n! < (n+1) \times n!$ vale perché $2 < n + 1$ per $n \geq 4$.

## Esercizio 4

Si calcolino tutte le soluzioni del seguente sistema di equazioni lineari:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 5 & 3 \\ 3 & 5 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

## Soluzione

Consideriamo la matrice estesa A:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 3 & 2 \\ 3 & 5 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

Il nostro primo scopo è di ottenere a partire da $A$ una matrice $B$ in cui $B_{21} = B_{31} = 0$. Sottraiamo alla seconda riga di $A$ la prima riga moltiplicata per due. Otteniamo:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & -4 \\ 3 & 5 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

A questo punto sottraiamo alla terza riga la prima moltiplicata per tre. Otteniamo la matrice $B$:

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & -4 \\ 0 & -1 & -2 & -8 \end{pmatrix}$$

Il nostro prossimo scopo è di ottenere a partire da $B$ una matrice $C$ in cui $B_{32} = 0$. Sommiamo alla terza riga di $B$ la seconda. Otteniamo la matrice $C$:

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & -4 \\ 0 & 0 & -3 & -12 \end{pmatrix}$$

Quindi, dalla terza riga della matrice $C$ otteniamo $-3z = -12$, da cui ricaviamo $z = 4$. Dalla seconda riga abbiamo $y - z = -4$. Sostituendo il valore $z = 4$ si ha: $y = 0$. Dalla prima riga ricaviamo la seguente equazione $x + 2y + 2z = 3$. Sostituendo i valori di $y = 0$ e $z = 4$ si ottiene $x + 8 = 3$ da cui $x = -5$. In conclusione, il seguente vettore

$$\begin{pmatrix} -5 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$$

è l'unica soluzione del sistema lineare.

## Esercizio 5

Si determini il resto della divisione di $8^{75}$ per 13.

## Soluzione

Ricordiamo il teorema di Fermat: se $p$ è un numero primo e $x$ non è divisibile per $p$, allora $x^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$. Applicando il teorema di Fermat al numero primo 13, otteniamo $x^{12} \equiv 1 \pmod{13}$. Quindi $8^{75} = (2^3)^{75} = 2^{225} = 2^{12\times 18+9} = 2^{12\times 18} \times 2^9 = (2^{12})^{18} \times 2^9 \equiv_{13} 1^{18} \times 2^9 = 2^9 = 2^4 \times 2^4 \times 2 \equiv_{13} 3 \times 3 \times 2 \equiv_{13} 5$.