Matematica Discreta

Compitino Modulo I - AAAAA
14 Gennaio 2013

Nome e Cognome:

Numero Matricola:

Giustificare ogni risposta.

Esercizio 1

Siano $A = \{a, b, c\}$ e $B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ insiemi. Determinare quante sono

(i) le funzioni iniettive $f : A \to B$ tali che $f(b) = 5$ e $f(c) = 2$;

(ii) le funzioni surgettivi $f : A \to B$ tali che $f(b) = f(c) = 5$;

(iii) le funzioni $f : A \to B$ per cui $f(a) = f(c) = 2$.

Soluzione

(i) L'elemento "a" e' l'unico elemento su cui la funzione f non e' ancora definita. Quante possibilità abbiamo per $f(a)$? Se vogliamo che la funzione resti iniettiva, abbiamo soltanto le seguenti tre possibilità: $f(a) = 1$, $f(a) = 3$ e $f(a) = 4$.
(ii) Non esiste alcuna funzione surgettiva da un insieme di tre elementi in un insieme di 5 elementi.
(iii) L'elemento "b" e' l'unico elemento su cui la funzione f non e' ancora definita. Quante possibilità abbiamo per $f(b)$? Abbiamo le seguenti cinque possibilità: $f(b) = 1$, $f(b) = 2$, $f(b) = 3$, $f(b) = 4$ e $f(b) = 5$.

Esercizio 2

Una scatola contiene 5 palline numerate da 1 a 5. Si eseguono 4 estrazioni. Determinare quanti sono

(i) gli allineamenti (con ordine) che si possono ottenere come risultato delle 4 estrazioni supponendo di rimettere, dopo ogni estrazione, la pallina nell'urna.

(ii) gli allineamenti (senza ordine) che si possono ottenere come risultato delle 4 estrazioni supponendo di NON rimettere, dopo ogni estrazione, la pallina nell'urna.

Soluzione

(i) $D'_{5,4} = 5^4$. Disposizioni con ripetizione.
(ii) $C_{5,4} = (5\ su\ 4) = 5!/4! \times 1! = 5$. Combinazioni semplici.

Esercizio 3

Si determini qual e' il resto della divisione di $(512)^{99}$ per 11.

Soluzione

11 e' un numero primo. Quindi vale il teorema di Fermat: $512^{10} \equiv 1$ modulo 11. Allora $(512)^{99} = (512)^{9\times 10+9} = ((512)^{10})^9 \times (512)^9 \equiv 1^{90} \times (512)^9 = (512)^9$. Ma $512 = 2^9$. In conclusione abbiamo $(512)^{99} \equiv (512)^9 = (2^9)^9 = 2^{81} = 2 \times 2^{80} \equiv 2$ modulo 11.

Esercizio 4

Si determino x e y, se esistono, tali che $5x + 22y = 1$. Perche' non esistono x e y tali che $12x + 15y = 1$?

Soluzione

5 e 22 sono primi fra loro, quindi l'equazione lineare ammette soluzione: $5 \times 9 + 22 \times (-2) = 45 - 44 = 1$. I numeri 12 e 15 non sono primi fra loro. Il loro massimo comuni divisore e' 3. Se esistessero x e y tali che $12x + 15y = 1$, allora 3 dovrebbe dividere 1, che e' impossibile.

Esercizio 5

Si provi per induzione che ogni insieme di n elementi ha 2^n sottoinsiemi.

Soluzione

Base induzione: $n = 0$. L'unico sottoinsieme dell'insieme vuoto e' l'insieme vuoto stesso. Quindi $|\mathcal{P}(\emptyset)| = |\{\emptyset\}| = 1 = 2^0$.

Supponiamo per ipotesi d'induzione che ogni insieme di n elementi ha 2^n sottoinsiemi. Proviamo ora che ogni insieme di $n+1$ elementi ha 2^{n+1} sottoinsiemi. Sia A un insieme di $n+1$ elementi e sia $a \in A$ un fissato elemento di A. Allora l'insieme dei sottoinsiemi di A e' diviso in due sottoclassi: L'insieme $\mathcal{X}$ dei sottoinsiemi che non contengono a

$$\mathcal{X} = \{Z : Z \subseteq A, a \notin Z\} = \mathcal{P}(A \setminus \{a\}).$$

E l'insieme $\mathcal{Y}$ dei sottoinsiemi che contengono a

$$\mathcal{Y} = \{Z : Z \subseteq A, a \in Z\} = \{U \cup \{a\} : U \subseteq A \setminus \{a\}\},$$

perche' se $a \in Z \subseteq A$, allora $Z = (Z \setminus \{a\}) \cup \{a\}$. Per ipotesi d'induzione l'insieme $\mathcal{P}(A \setminus \{a\})$ ha 2^n elementi, ma anche l'insieme $\{U \cup \{a\} : U \subseteq A \setminus \{a\}\}$, che e' in corrispondenza bigettiva con $\mathcal{P}(A \setminus \{a\})$, ha 2^n elementi. Quindi in totale, $2^n + 2^n = 2^{n+1}$.