Soluzioni degli esercizi delle prove di Matematica Discreta (12 crediti), Matematica Discreta (6 crediti-Teoria dei grafi), Strutture discrete (6 crediti, vecchio ordinamento) del 26-01-2010.

Matematica Discreta (12 crediti)

1. Dimostrare per induzione che

$$1+2+\ldots+n \le n! \le n^n$$

per ogni $n \geq 5$.

Soluzione: Base induzione n=5: 1+2+3+4+5=15<5! = 120≤ 5^5=125×5^2.
Supponiamo per ipotesi induttiva che la disuguaglianza valga per n. Proviamola per n+1.
$1+2+\ldots+n+(n+1) \le n!+(n+1) \le n!+(n+n)= n!+n\times 2 \le n!+n\times n!=(n+1)!$. L'ultima disuguaglianza segue perché da $n \geq 5$ segue che $n! \geq 2$. Infine $(n+1)! = (n+1) \times n! \le (n+1) \times n^n \le (n+1) \times (n+1)^n = (n+1)^{n+1}$.

2. Nell'insieme $N_0 \times N_0$ delle coppie di numeri naturali si definisca, per ogni $(a,b), (c,d) \in N_0 \times N_0$ la relazione

$$(a, b)\ \Re\ (c, d) \Leftrightarrow a+b=c+d.$$

(a) Verificare se la relazione $\Re$ è una relazione di equivalenza. In caso affermativo determinare quante sono le classi di equivalenza.
(b) Determinare quante sono le coppie (c, d) tali che $(2, 3)\ \Re\ (c, d)$.

Soluzione: Le tre proprietà delle relazioni di equivalenza seguono dalle analoghe proprietà dell'uguaglianza.
-Proprietà riflessiva: $(a, b)\ \Re\ (a, b)$ perché $a+b= a+b$.
-Proprietà simmetrica: $(a, b)\ \Re\ (c, d) \Leftrightarrow a+b=c+d \Leftrightarrow c+d=a+b \Leftrightarrow (c, d)\ \Re\ (a, b)$.
-Proprietà transitiva: se $(a, b)\ \Re\ (c, d)\ \Re\ (e, f)$ allora $a+b=c+d= e+f$ da cui segue $(a, b)\ \Re (e, f)$.
-Vi sono infinite classi di equivalenza perché (0,0), (0,1), (0,2), (0,3),…… sono infiniti elementi a due a due non equivalenti.
-La classe di equivalenza di (2,3) è costituita da tutte le coppie (a,b) che verificano $a+b$=5, cioè (0,5), (5,0), (1,4), (4,1), (3,2), (2,3).

3. Si definisca $S(x) \equiv x$ è uno studente, $P(x) \equiv x$ è un professore e $R(x, y) \equiv x$ ammira y. Si formalizzi la seguente frase:

Ogni professore ammira tutti gli studenti.

Soluzione:

$$\forall x \forall y (P(x) \wedge S(y) \rightarrow \Re(x, y))$$

Oppure:

$$\forall x (P(x) \rightarrow \forall y (S(y) \rightarrow \Re(x, y))$$

4. Si provi che se ***G*** e' un grafo con almeno due vertici, allora ***G*** ha almeno due vertici con lo stesso grado.

Soluzione: Se ***G*** ha n vertici, il grado di ogni vertice e' al piu' n-1. Pertanto, detto V l'insieme dei vertici di ***G***, l'applicazione δ: $V \rightarrow \{1,\ldots, n-1\}$ che ad ogni vertice associa il suo grado non puo' essere iniettiva per il principio pidgeonhole, dato che il dominio e' un insieme con n elementi e il codominio un insieme con n -1 elementi
dunque esistono due vertici distinti che devono avere lo stesso grado.

5. Sia Sia ***G***=(V,E) un grafo ove $V=\{0, 1,\ldots, 199\}$, ed $E=\{\{x,y\} | x,y \in V, x \neq y$ e $x \equiv y \pmod 7\}$. Quante sono le componenti connesse di ***G***?

Soluzione: Sappiamo che ci sono esattamente sette classi di congruenza modulo 7 negli interi. Essendo V un sottoinsieme degli interi, V "eredita" la relazione di congruenza modulo 7 da ***Z***. Poiche' V contiene almeno un rappresentante di ognuna delle classi di congruenza modulo 7, la relazione di congruenza modulo 7 in V determina 7 classi di congruenza, che sono classi di equivalenza, e pertanto, in particolare, sono tra loro disgiunte. Dunque, per definizione di lato di ***G,*** due elementi di V sono i vertici di un lato di ***G*** se e solo se fanno parte della stessa classe di congruenza modulo 7. Cio' significa che le componenti connesse di ***G*** sono 7 e sono i sottografi completi di ***G***, i cui vertici sono gli elementi di V che stanno in una delle 7 classi di congruenza modulo 7 di V.

Matematica Discreta (6 crediti)
Teoria dei grafi

1. Si consideri il grafo ***G***=(V,E), con $V=\{(a_1, a_2, \ldots, a_k) | a_i \in \mathbf{Z}_2$ ed $e \in E$ e' un lato di ***G*** se e solo se contiene due vertici che differiscono in una ed una sola posizione. Si provi che ***G*** e' bipartito.

Soluzione: Sia $X=\{v \in V \mid \sum_{i=1}^{k} a_i = 0$ in $\mathbf{Z}_2\}$ e sia $Y=\{v \in V \mid \sum_{i=1}^{k} a_i = 1$ in $\mathbf{Z}_2\}$. Allora $V=X \cup Y$ e un qualsiasi lato di ***G*** ha necessariamente un vertice in X e uno in Y, dato che due vertici distinti in X devono differire in un numero pari ≥ 2 di posizioni, e la stessa cosa vale anche per i vertici di Y.

2. Sia Sia ***G***=(V,E) un grafo ove $V=\{0, 1,\ldots, 199\}$, ed $E=\{\{x,y\} | x,y \in V, x \neq y$ e $x \equiv y \pmod 7\}$. Quante sono le componenti connesse di ***G***?

Soluzione: Sappiamo che ci sono esattamente sette classi di congruenza modulo 7 negli interi. Essendo *V* un sottoinsieme degli interi, *V* "eredita" la relazione di congruenza modulo 7 da ***Z***. Poiche' *V* contiene almeno un rappresentante di ognuna delle classi di congruenza modulo 7, la relazione di congruenza modulo 7 in *V* determina 7 classi di congruenza, che sono classi di equivalenza, e pertanto, in particolare, sono tra loro disgiunte. Dunque, per definizione di lato di ***G,*** due elementi di *V* sono i vertici di un lato di ***G*** se e solo se fanno parte della stessa classe di congruenza modulo 7. Cio' significa che le componenti connesse di ***G*** sono 7 e sono i sottografi completi di ***G***, i cui vertici sono gli elementi di *V* che stanno in una delle 7 classi di congruenza modulo 7 di *V*.

3. Si provi che se ***G*** e' un grafo con almeno due vertici, allora ***G*** ha almeno due vertici con lo stesso grado.

Soluzione: Se ***G*** ha *n* vertici, il grado di ogni vertice e' al piu' *n*-1. Pertanto, detto *V* l'insieme dei vertici di ***G***, l'applicazione δ: $V \rightarrow \{1,\dots, n\text{-}1\}$ che ad ogni vertice associa il suo grado non puo' essere iniettiva per il principio pidgeonhole, dato che il dominio e' un insieme con *n* elementi e il codominio un insieme con *n* -1 elementi
dunque esistono due vertici distinti che devono avere lo stesso grado.

4. La sottostante tabella fornisce le distanze tra le sei localita'A,B,C,D,E.F in Km.

	A	B	C	D	E	F
A	-	78	60	75	70	104
B	78	-	130	127	135	100
C	60	130	-	64	85	154
D	75	127	64	-	145	115
E	70	135	85	145	-	185
F	104	100	154	115	185	-

Si usi l'algoritmo per trovare un MST (Minimum spanning tree) per calcolare un percorso di lunghezza minima che tocchi tutte le sei localita'. Si calcoli la lunghezza di tale percorso e lo si disegni sul foglio.

Soluzione: Consideriamo il grafo completo pesato i cui vertici sono le localita' in ogettto e il peso di un lato e' la distanza in Km tra i due vertici. L'algoritmo in oggetto prevede di scegliere ad ogni passo un lato di peso minimo possibile tra quelli adiacenti ai lati scelti fino a quel passo con l'unica accortezza di non formare cicli. Si sceglierа' dunque per primo il lato {A,C}, poi il lato {C,D}, poi il lato {A,B} e infine il lato {B.F}, per un totale di 372 Km.

Strutture Discrete

1. ∀ $n \in N$ si definisca $f(n)$ ponendo

$$f(0)=1,\ f(1)=3,\ f(n)=6f(n\text{-}2)+f(n\text{-}1) \text{ se } n\geq 2.$$

Si dimostri, ragionando per induzione su *n*, che $f(n)=3^n$.

Soluzione: applichiamo il principio di induzione nella seconda forma, facendo induzione su n. Caso base $n=0$; $3^0=1$, e dunque la base è verificata. Fissiamo $n>0$ e supponiamo, per ipotesi induttiva nella seconda forma, che la formula sia vera fino ad n compreso. Si ha $f(n+1)= 6f(n-1)+f(n)=$(per ipotesi induttiva nella seconda forma) $6(3^{n-2})+3^{n-1}=3^{n-1}(2+1)=3^n$. Dunque il passo induttivo è verificato. Il principio di induzione ci permette di affermare che allora la formula è vera $\forall n\in\mathbf{N}$.

2. Sia $\boldsymbol{A}=\{f : \{a,b,c\}\to\mathbf{N}\}$ l'insieme delle funzioni dell'insieme $\boldsymbol{X}=\{a,b,c\}$su $\mathbf{N}$. In $\boldsymbol{A}$ si definisca un ordinamento parziale ponendo $f\leq g$ se e solo se $f(x)\leq g(x)$ per ogni $x\in\boldsymbol{X}$.

(a) Si provi che $(\boldsymbol{A},\leq)$ è un reticolo.
(b) Il reticolo $(\boldsymbol{A},\leq)$ è limitato inferiormente?
(c) Il reticolo $(\boldsymbol{A},\leq)$ è limitato superiormente?
(d) (facoltativo) Sia $\boldsymbol{B}=\{f\in\boldsymbol{A}\mid f(\mathrm{a})$ è divisibile per $3\}$. Dire se $\boldsymbol{B}$ è un sottoreticolo di $\boldsymbol{A}$.

Soluzione: (a) Date $f, g\in\boldsymbol{A}$, è immediato verificare che gli elementi di $\boldsymbol{A}$

$$f\vee g: x\to\max\{f(x), g(x)\} \quad \text{e} \quad f\wedge g: x\to\min\{f(x), g(x)\}$$

sono rispettivamente l'estremo superiore e l'estremo inferiore di $\{f, g\}$.
(b) Si, poiché la funzione z: $\boldsymbol{X}\to\mathbf{N}$, $z(x)=0$ $\forall x\in\mathbf{N}$ è un minorante per $\boldsymbol{A}$.
(c) No. Se esiste un maggiorante h per $\boldsymbol{A}$, sia $m=\max\{h(x)\mid x\in\boldsymbol{X}\}\in\mathbf{N}$. Sia $r>m$, e sia q, $q(x)=r$ $\forall$ $x\in\boldsymbol{X}$. Allora $q\in\boldsymbol{A}$, assurdo.
(d) Si. Per (a) se $f, g\in\boldsymbol{B}$, allora $f\vee g: x\to\max\{f(x), g(x)\}$ e $f\wedge g: x\to\min\{f(x), g(x)\}$ sono tali che $f\vee g(a)$ e $f\wedge g(a)$ sono entrambi divisibili per 3 e quindi $f\vee g$ e $f\wedge g$ sono entrambi elementi di $\boldsymbol{B}$.

3. Sia $\boldsymbol{G}=(V, L)$ un albero con 1 vertice di grado 2, 3 vertici di grado 3, 2 vertici di grado 4 e nessun vertice di grado maggiore di 4. Dire quanti vertici di grado 1 possiede $\boldsymbol{G}$.

Soluzione: Sia $n=|V|$ e sia m il numero dei vertici di $\boldsymbol{G}$ di grado 1. Allora, poiché $\boldsymbol{G}$ è un albero, n-1è il numero dei lati di $\boldsymbol{G}$. Inoltre, la nota formula che collega lati e gradi dei vertici di un grafo fornisce $2(n-1)= m\bullet1+1\bullet2+3\bullet3+2\bullet4$. Da qui è elementare dedurre che $m=9$.

4. Sia $(\boldsymbol{M}, \maltese)$ un monoide. Dati due elementi x e y di $\boldsymbol{M}$, di si ponga $x\sim y$ se esiste $n\in\boldsymbol{N}\setminus\{0\}$tale che $x^n=y^n$.

(a) Si provi che la relazione $\sim$ è una equivalenza in $\boldsymbol{M}$.
(b) Se $\boldsymbol{M}$ è commutativo, si provi che l'equivalenza $\sim$ è compatibile con l'operazione di $\boldsymbol{M}$.

Soluzione: (a):
(i) Proprietà riflessiva: se $x\in\boldsymbol{M}$ si ha $x^1= x^1$.
(ii) Proprietà simmetrica: siano $x, y\in\boldsymbol{M}$ con $x\sim y$. Allora esiste $n\in\boldsymbol{N}\setminus\{0\}$tale che $x^n=y^n$.
(iii) Proprietà transitiva: siano $x, y, z\in\boldsymbol{M}$ con $x\sim y$ e $y\sim z$. Allora esistono $n, m\in\boldsymbol{N}\setminus\{0\}$tali che

$x^n=y^n$ e $y^m=z^m$. Dunque $x^{nm}=z^{nm}$.

(b) Siano a, b, c, d elementi di $\boldsymbol{M}$ con $a\sim b$ e $c\sim d$. Allora esistono $n, m \in \boldsymbol{N}\setminus\{0\}$ tali che $a^n=b^n$ e $c^m=d^m$. Poiché $\boldsymbol{M}$ è commutativo risulta

$$(a \maltese c)^{nm}=(a^n)^m \maltese (c^m)^n=(b^n)^m \maltese (d^m)^n=b^{nm} \maltese d^{nm}.$$

e dunque $a \maltese c \sim b \maltese d$.