Soluzioni degli esercizi prove scritte M.D del 04-09-2009

Esercizio Si provi che per ogni numero naturale n si ha $7^n \equiv 1 (\text{mod } 8)$ se n e' pari e $7^n \equiv 7 (\text{mod } 8)$ se n e' dispari.

Soluzione: (*)Innanzitutto ricordiamo che il prodotto e' una operazione ben definita in $\mathbf{Z}_8$ e cio' significa che se $a \equiv b$ (mod 8), e $c \equiv d$ (mod 8), allora $ac \equiv bd$ (mod 8) .
Se n e' pari, $n=2k$, con k numero intero. Pertanto $7^n=7^{2k}=(7^2)^k$.
$7^2=49\equiv 1 (\text{mod } 8)$ e dunque, per l'osservazione iniziale (*) si ha $7^n=7^{2k}=(7^2)^k\equiv 1^k \equiv 1$ (mod 8). Se invece n e' dispari, $n=2k+1$, con k numero intero. Pertanto, tenendo ancora conto di (*) e del caso pari si ha $7^n=7^{2k+1}=7(7^2)^k \equiv 7 \bullet 1 \equiv 7$ (mod 8).

Esercizio Si provi che se $\boldsymbol{G}$ e' un grafo con almeno due vertici, allora $\boldsymbol{G}$ ha almeno due
vertici con lo stesso grado.

Soluzione: Se $\boldsymbol{G}$ ha n vertici, il grado di ogni vertice e' al piu' n-1. Pertanto, detto V l'insieme dei vertici di $\boldsymbol{G}$, l'applicazione δ: $V \to \{1,\ldots, n-1\}$ che ad ogni vertice associa il suo grado non puo' essere iniettiva per il principio pidgeonhole, dato che il dominio e' un insieme con n elementi e il codominio un insieme con n -1 elementi dunque esistono due vertici distinti che devono avere lo stesso grado.

Esercizio Si consideri il grafo $\boldsymbol{G}=(V,E)$, con $V=\{(a_1, a_2 ,\ldots, a_k) \mid a_i \in \mathbf{Z}_2$ ed $e \in E$ e' un lato
di $\boldsymbol{G}$ se e solo se contiene due vertici che differiscono in una ed una sola posizione.
Si provi che $\boldsymbol{G}$ e' bipartito.

Soluzione: Sia $X=\left\{v \in V \mid \sum_{i=1}^{k} a_i = 0 \text{ in } \mathbf{Z}_2\right\}$ e sia $Y=\left\{v \in V \mid \sum_{i=1}^{k} a_i = 1 \text{ in } \mathbf{Z}_2\right\}$. Allora $V=X \cup Y$ e un qualsiasi lato di $\boldsymbol{G}$ ha necessariamente un vertice in X e uno in Y, dato che due vertici distinti in X devono differire in un numero pari ≥ 2 di posizioni, e la stessa cosa vale anche per i vertici di Y.

Esercizio Sia Sia $\boldsymbol{G}=(V,E)$ un grafo ove $V=\{0, 1,\ldots, 99\}$, ed $E=\{\{x,y\} \mid x,y \in V, x \neq y$ e
$x \equiv y$ (mod 5). Quante sono le componenti connesse di $\boldsymbol{G}$?

Soluzione: Sappiamo che ci sono esattamente cinque classi di congruenza modulo 5 negli interi. Essendo V un sottoinsieme degli interi, V "eredita" la relazione di congruenza modulo 5 da $\mathbf{Z}$. Poiche' V contiene almeno un rappresentante di ognuna delle classi di congruenza modulo 5, la relazione di congruenza modulo 5 in V determina 5 classi di congruenza, che sono classi di equivalenza, e pertanto, in particolare, sono tra loro disgiunte. Dunque, per definizione di lato di $\boldsymbol{G}$, due elementi di V sono i vertici di un lato di $\boldsymbol{G}$ se e solo se fanno parte della stessa classe di congruenza modulo 5. Cio' significa che le componenti connesse di $\boldsymbol{G}$ sono 5 e sono i sottografi completi di $\boldsymbol{G}$, i cui vertici sono gli elementi di V che stanno in una delle 5 classi di congruenza modulo 5 di V.

Esercizio La sottostante tabella fornisce le distanze tra le sei localita'A,B,C,D,E.F in Km.

	A	B	C	D	E	F
A	-	78	60	75	70	104
B	78	-	130	127	135	100
C	60	130	-	64	85	154
D	75	127	64	-	145	115
E	70	135	85	145	-	185
F	104	100	154	115	185	-

Si usi l'algoritmo per trovare un MST (Minimum spanning tree) per calcolare un percorso di lunghezza minima che tocchi tutte le sei localita'. Si calcoli la lunghezza di tale percorso e lo si disegni sul foglio.
Soluzione: Consideriamo il grafo completo pesato i cui vertici sono le localita' in ogettto e il peso di un lato e' la distanza in Km tra i due vertici. L'algoritmo in oggetto prevede di scegliere ad ogni passo un lato di peso minimo possibile tra quelli adiacenti ai lati scelti fino a quel passo con l'unica accortezza di non formare cicli. Si scegliera' dunque per primo il lato {A,C}, poi il lato {C,D}, poi il lato {A,B} e infine il lato {B.F}, per un totale di 372 Km.

Esercizio Tenendo conto che la somma degli angoli interni di un triangolo misura π dimostrare, ragionando per induzione su n, che la somma degli angoli interni di un poligono convesso con n lati misura $(n - 2)\pi$.
Soluzione: Usiamo induzione su n.
Base dell'induzione: n=3; allora $(n - 2)\pi.=\pi$, che uguaglia la somma degli angoli interni di un triangolo.
Passo induttivo; sia n>3 e supponiamo la formula vera per tutti i poligoni convessi con n-1 lati. Sia dato un poligono P con n lati. Prendiamo due lati consecutivi $l_1=\{v,w\}$ e $l_2=\{w,u\}$ di P , ove v,w,u sono vertici di P. Allora, poiche' $n>3$, $\{v,u\}$ non e' u lato di P. Il lato $\{v,u\}$ "suddivide(*) P in due poligoni, Q con n-1 lati e il triangolo T di vertici u, v, w. La somma s degli angoli interni di P risulta cosi' essere uguale alla somma di due addendi a e b, ove a e' la somma degli angoli interni di Q e b la somma degli angoli interni di T. Per induzione supponiamo che $a=(n-1- 2)\pi$, mentre sappiamo che $b=\pi$. Pertanto $s=a+b=(n-1- 2)\pi+\pi=(n- 2)\pi$. Con cio' e' verificato il passo induttivo. Il principio di induzione ci dice che allora la formula e' vera $\forall\ n\geq3$.
(*) La definizione di "suddivisione" andrebbe formalizzata, ma e' chiaro quello che si sta facendo.

Esercizio Nell' insieme $\boldsymbol{N}$x$\boldsymbol{N}$ si definisca, per ogni (a, b), (c, d) $\in \boldsymbol{N}$x$\boldsymbol{N}$ la relazione

(a, b) $\preceq$ (c, d) se e solo se $\dfrac{3^a 11^b}{3^c 11^d} \leq 1$. Dire se

(a) la relazione $\preceq$ e' un ordinamento totale su $\boldsymbol{N}$x$\boldsymbol{N}$;
(b) l'applicazione f : $\boldsymbol{N}$x$\boldsymbol{N} \rightarrow \boldsymbol{N}$, (a, b) $\rightarrow 3^a 11^b$ e' iniettiva;

(c) l'applicazione f e' un omomorfismo tra gli insiemi ordinati (NxN, $\preceq$) e (N, $\leq$).

Soluzione:

(a) $\preceq$ e' un ordinamento se gode delle seguenti proprieta': ***i)*** riflessiva ***ii)*** antisimmetrica iii) transitiva. E' un ordinamento totale se, in aggiunta a ***i), ii)*** , ***iii)*** , vale la ***iv)*** due qualsiasi elementi di NxN sono confrontabili. Verifichiamo che $\preceq$ gode delle proprieta' ***i), ii) , iii) , iv).*** Per comodita' osserviamo che, poiche' per ogni (x,y) $\in N$xN si ha $3^x 11^y \neq 0$, si ha (a, b)$\preceq$ (c, d) se e solo se $3^a 11^b \leq 3^c 11^b$.

i) Sia (a, b)$\in N$xN . Poiche' $\frac{3^a 11^b}{3^a 11^b} = 1$, si ha (a, b)$\preceq$ (a, b). ***ii)*** Siano (a, b), (c, d) $\in N$xN, con (a, b)$\preceq$ (c, d) e (c, d)$\preceq$ (a, b). Cio' significa che $3^a 11^b \leq 3^c 11^b$ e $3^c 11^d \leq 3^a 11^b$. Dunque, poiche' l'ordinamento usuale in N e' una relazione d'ordine si ha $3^c 11^d = 3^a 11^b$. Ma allora, poiche' 3 e 11 sono numeri primi, il teorema fondamentale dell'aritmetica ci dice che deve essere (a,b)=(c,d). ***iii)*** Siano (a, b), (c, d), (e,f) $\in N$xN, con (a, b)$\preceq$ (c, d) e (c, d)$\preceq$ (e, f). E' immediato, alla luce dell'osservazione iniziale, dato che l'ordinamento usuale in N gode della proprieta' transitiva, concludere che allora (a, b)$\preceq$ (e, f). ***iv)*** Siano (a, b), (c, d) $\in N$xN. Anche in questo caso e' immediato , alla luce dell'osservazione iniziale, dato che l'ordinamento usuale in N e' totale, concludere che (a, b)$\preceq$ (c, d) o (c, d)$\preceq$ (a, b).

(b) Supponiamo f(a,b)=f(c,d), cioe', $3^a 11^b = 3^c 11^d$. Come nella dimostrazione di (a) ***ii)*** , poiche' 3 e 11 sono numeri primi, il teorema fondamentale dell'aritmetica ci dice che deve essere (a,b)=(c,d), e dunque f e' iniettiva.

(c) l'applicazione f e' un omomorfismo tra gli insiemi ordinati (NxN, $\preceq$) e (N, $\leq$) se e solo se da (a, b)$\preceq$ (c, d) segue f(a, b)$\leq$ f(c, d). Cio' segue immediatamente dall'osservazione iniziale.

<u>**Esercizio**</u> Dire quanti sono, a meno di isomorfismo, gli alberi con radice dotati di 5 vertici.

Soluzione: Un isomorfismo tra alberi con radice, oltre alle proprieta' di isomorfismo tra grafi, deve:

a) Mandare radice in radice
b) Conservare l'altezza
c) Conservare numero e gradi dei vertici ad ogni livello.

Alla luce di a),b),c), si potrebbe dimostrare formalmente, considerando i vari casi possibili, che gli alberi con radice con 5 vertici a meno di isomorfismo sono 9. Riteniamo che sia sufficiente una risposta in cui si elenchino gli 8 casi e i criteri del tipo di a), b), c) che vengono usati per classificarli.

Ecco i 9 casi possibili:

1) Altezza 1, radice di grado 4, gli altri 4 vertici hanno grado 1.
2) Altezza 2, radice di grado 3, 3 vertici a livello 1, di cui 2 di grado 1 e 1 di grado 2, 1 vertice a livello 2 di grado 1.
3) Altezza 2, radice di grado 2, 2 vertici a livello 1 di grado 2, due vertici a livello 2 di grado 1.
4) Altezza 2, radice di grado 2, 2 vertici a livello 1 di cui 1 di grado 3 e uno di grado 1, 2 vertici a livello 2 di grado 1.

5) Altezza 2, radice di grado 1, 1 vertice a livello 1 di grado 4, 3 vertici a livello 2 di grado 1.
6) Altezza 3, radice di grado 2, 2 vertici a livello 1 di cui uno di grado 2 e 1 di grado 1, 1 vertice a livello 2 di grado 2, un vertice a livello 3 di grado 1.
7) Altezza 3, radice di grado 1, 1 vertice a livello 1 di grado 3, 2 vertici a livello 2 di cui uno di grado 2 e 1 di grado 1, 1 vertice a livello 3 di grado 1.
8) Altezza 3, radice di grado 1, 1 vertice a livello 1 di grado 2, 1 vertice a livello 2 di grado 3, 2 vertici a livello 3 di grado 1.
9) Altezza 4, radice di grado 1, 1 vertice a livello 1 di grado 2, 1 vertice a livello 2 di grado 2, 1 vertice a livello 3 di grado 2, 1 vertice a livello 4 di grado 1.

<u>Esercizio</u> Dimostrare che ogni gruppo di ordine 5 e' abeliano.
Soluzione: Sia $\boldsymbol{G}$ un gruppo con 5 elementi e sia 1 l'identita' di $\boldsymbol{G}$.Poiche' in un gruppo ogni elemento e' dotato di inverso, distinguiamo due casi:

1) Esiste $a \in \boldsymbol{G}$ con $a \neq 1$, tale che $a = a^{-1}$.
2) Per ogni $a \in \boldsymbol{G}$ con $a \neq 1$, si ha $a \neq a^{-1}$.

Vediamo che il caso 1) non si puo' presentare in un gruppo con 5 elementi, supponendo che tale caso si presenti e giungendo ad un assurdo. Sia allora $\boldsymbol{G}=\{1,a,b,c,d\}$, con che $a= a^{-1}$. e dunque $a^2=1$. Allora $ab \neq 1, a, b$ e dunque possiamo supporre $ab=c$. Ne segue $b=aab= ac$. Anche $ad \neq 1, a, d$ e dunque $ad=b$ oppure $ad=c$. Verifichiamo che ambedue queste possibilita' portano ad un assurdo; se $ad=b$ allora $d=aad=ab=c$, assurdo; se $ad=c$ allora $d=aad=ac=b$, anche in tal caso assurdo. Dunque non e' possibile avere in $\boldsymbol{G}$ un elemento diverso dall'identita' che sia uguale al suo inverso. Necessariamente dunque il caso **1)** non puo' presentarsi, e pertanto ricadiamo nel caso **2)**. Allora il nostro gruppo con 5 elementi sara' della forma

$$\boldsymbol{G}=\{1,a, a^{-1}, b, b^{-1}\}.$$

A questo punto e' facile verificare che un tale gruppo e' abeliano. Sara' sufficiente verificare che a commuta con b, poiche' in generale in un gruppo se a commuta con b allora ogni potenza intera di a commuta con ogni potenza intera di b. Si ha $ab \neq 1, a, b$, e anche $ba \neq 1, a, b$. Le uniche possibilita' sono allora $ab= a^{-1}$ oppure $ab= b^{-1}$. Dal primo caso segue $b=a^{-2}$, e dunque b e' una potenza intera di a. Dal secondo caso segue $a=b^{-2}$ e dunque a e' una potenza intera di b. In ogni caso un elemento e' potenza intera dell'altro, e dunque i due elementi commutano. Pertanto $\boldsymbol{G}$ e' abeliano.