

Esercizi vari

Alberto Carraro

December 20, 2009

Esercizio 1. Si consideri l'alfabeto di tre simboli $L = \{a, b, c\}$ e sia L^* l'insieme di tutte le stringhe finite costruite sull'alfabeto L . Definire induttivamente una funzione $|\cdot| : L^* \rightarrow \mathbb{N}$ tale che $|s|$ sia la lunghezza della stringa $s \in L^*$.

Soluzione 1. Indichiamo con ε la stringa vuota. Le lettere s, s', \dots variano sull'insieme L^* , mentre l, l', \dots variano su L . Poniamo induttivamente:

- $|\varepsilon| = 0$
- $|ls| = 1 + |s|$

Esercizio 2. Si considerino gli alfabeti di tre simboli $N = \{0, 1, 2\}$ e $L = \{a, b, c\}$. Definire induttivamente una funzione biiettiva $f : L^* \rightarrow N^*$.

Soluzione 2. Indichiamo con ε la stringa vuota. Le lettere s, s', r, r', \dots variano sull'insieme L^* , mentre l, l', \dots variano su L . Le lettere t, t', \dots variano sull'insieme N^* , mentre n, n', \dots variano su N . Usiamo la notazione $|t|$ per indicare anche la lunghezza di una stringa $t \in N^*$. Poniamo induttivamente:

- $f(\varepsilon) = \varepsilon$
- $f(ls) = \begin{cases} 0f(s) & \text{se } l = a \\ 1f(s) & \text{se } l = b \\ 2f(s) & \text{se } l = c \end{cases}$

Come prima cosa osserviamo che $|s| = |f(s)|$ per ogni $s \in L^*$. Quindi se $|s| \neq |s'|$ allora $f(s) \neq f(s')$. Questo vuol dire che per mostrare l'iniettività di f basta controllare che

$$\text{per ogni } s, s' \text{ tali che } |s| = |s'| \text{ se } s \neq s' \text{ allora } f(s) \neq f(s')$$

Inoltre osserviamo che $f(ls) = f(l)f(s)$, per ogni $l \in L$ ed $s \in L^*$. Procediamo per induzione sulla lunghezza delle stringhe. Il caso base è immediato dato che ε è la sola stringa di lunghezza 0 e $f(\varepsilon) = \varepsilon$. Supponiamo ora che $s, s' \in L^*$ siano tali che $s \neq s'$ e $|s| = |s'| = k + 1$ e che f mappi in maniera iniettiva tutte le stringhe di lunghezza fino a k . Essendo di lunghezza $k + 1$, avremo che $s = lr$ e $s' = l'r'$, per qualche $l, l' \in L$ e $r, r' \in L^*$. Abbiamo quindi

$$f(s) = f(lr) = f(l)f(r) \text{ e } f(s') = f(l'r') = f(l')f(r')$$

Abbiamo quindi due casi:

$l = l'$: In questo caso si deve avere $r \neq r'$. Quindi

$$\begin{aligned} f(s) &= f(l)f(r) \\ &\neq f(l)f(r') \text{ per l'ipotesi induttiva,} \\ &= f(s') \end{aligned}$$

$l \neq l'$: In questo caso chiaramente $f(s) = f(l)f(r) \neq f(l')f(r') = f(s')$, poiché $f(l) \neq f(l')$.