Matematica Discreta (6 crediti) AAAAA

9 Gennaio 2017

Cognome e nome:
Matricola:

1. Dimostrare che per ogni $n \geq 1$, il numero $10^n - 1$ è divisibile per 9.

   Soluzione: Possiamo riscrivere il testo dell'esercizio utilizzando le congruenze: $10^n \equiv_9 1$ per ogni $n \geq 1$. Dal fatto che $10 \equiv_9 = 1$ si ricava: $10^n \equiv_9 1^n = 1$. Fine! Ci rivolgiamo ora a coloro che non si sono accorti di questa soluzione ed hanno applicato il principio di induzione.

   Base dell'induzione $n = 1$: $10^1 - 1 = 9$, che è divisibile per 9. Supponiamo per ipotesi di induzione che $10^n - 1$ sia divisibile per 9. Verifichiamo che anche $10^{n+1} - 1$ è divisibile per 9.

   $$10^{n+1} - 1 = (10 \times 10^n) - 10 + 9 = 10(10^n - 1) + 9$$

   Entrambi i numeri sono divisibili per 9. Il principio d'induzione ci permette di concludere che $10^n - 1$ è divisibile per 9 per ogni $n \geq 1$.

2. Formalizzare nel linguaggio matematico i seguenti enunciati, specificando l'universo del discorso, i simboli di relazione e le eventuali costanti

   - "Maria ama un figlio di Giovanni".
   - "solo gli studenti in corso sono iscritti agli esami".

   Soluzione: L'universo del discorso relativo al primo enunciato è l'insieme di tutte le persone. Utilizzeremo le seguenti relazioni:

   (a) xFy sse x è figlio di y;

   (b) xAy sse x ama y;

   (c) m è una costante che denota Maria.

   (d) g è una costante che denota Giovanni.

   $$\exists x(xFg \wedge mAx).$$

   L'universo del discorso relativo al secondo enunciato è l'unione dei seguenti due insiemi: l'insieme di tutte le persone e l'insieme di tutti gli esami. Utilizzeremo le seguenti relazioni:

   (a) $S(x)$ sse x è uno studente;

(b) $C(x)$ sse x è in corso;

(c) xIy sse x è iscritto a y;

(d) $E(x)$ sse x è un esame.

$$\forall x(\exists y(E(y) \wedge xIy) \to S(x) \wedge C(x))).$$

3. Si trovi il resto della divisione di 4^{76} per 17.

Soluzione: $4^2 = 16 \equiv_{17} -1$. Allora

$$4^{76} = 4^{2\times 38} = (4^2)^{38} \equiv_{17} (-1)^{38} = 1.$$

Un altro possibile modo di procedere è il seguente. 17 è un numero primo; quindi possiamo applicare il piccolo teorema di Fermat al numero 4 che è relativamente primo con 17: $4^{16} \equiv_{17} 1$. Dividiamo 76 per 16: $76 = 16 \times 4 + 12$ e procediamo come segue:

$$4^{76} = 4^{16\times 4+12} = 4^{16\times 4}4^{12} = (4^{16})^4 4^{12} \equiv_{17} 1^4 4^{12} = 4^{12}.$$

Quindi

$$4^{12} = (2^2)^6 \equiv_{17} (-1)^6 = 1.$$

4. Sia $\mathbb{Z}$ insieme dei numeri interi e sia E la relazione sull'insieme $\mathbb{R}$ dei numeri reali definita da

$$xEy \Leftrightarrow x - y \in \mathbb{Z}.$$

Dimostrare che E è una relazione di equivalenza. Determinare la classe di equivalenza del numero 1 e la classe di equivalenza di $1/2$.

Soluzione: Dobbiamo provare che E verifica le proprietà riflessiva, simmetrica e transitiva.

(a) (Proprietà Riflessiva) Dalla definizione di E abbiamo: xEx sse $x - x \in \mathbb{Z}$. Da $x - x = 0$ si ricava che xEx per ogni numero reale x.

(b) (Proprietà Simmetrica) Dall'ipotesi xEy si ricava $x - y \in \mathbb{Z}$. Ricordiamo che ogni numero intero z ammette un opposto $-z$ che è sempre un intero. Quindi, da $x - y \in \mathbb{Z}$ si ricava che $-(x - y) \in \mathbb{Z}$, cioé $y - x \in \mathbb{Z}$. In conclusione, yEx.

(c) (Proprietà Transitiva) Per ipotesi si ha xEy e yEz, che implicano $x - y \in \mathbb{Z}$ e $y - z \in \mathbb{Z}$. Allora $(x - y) + (y - z) \in \mathbb{Z}$, perché la somma di due interi è un numero intero. Infine, $(x - y) + (y - z) = x - z \in \mathbb{Z}$, che implica xEz.

Per definizione, la classe di equivalenza di 1 è l'insieme $[1]_E = \{z \in \mathbb{R} : z - 1 \in \mathbb{Z}\}$. Dal fatto che $z - 1 \in \mathbb{Z}$ sse $z \in \mathbb{Z}$ si ricava che $[1]_E = \mathbb{Z}$.

Per definizione, la classe di equivalenza di $\frac{1}{2}$ è l'insieme $[\frac{1}{2}]_E = \{z \in \mathbb{R} : z - \frac{1}{2} \in \mathbb{Z}\}$. Dal fatto che $z - \frac{1}{2} \in \mathbb{Z}$ si ricava che $[\frac{1}{2}]_E = \{m + \frac{1}{2} : m \in \mathbb{Z}\}$.

5. Sia A un insieme di cardfinalità n. Quanti sono i multinsiemi di A di cardinalità k?