Matematica Discreta (6 crediti) BBBB

23 Gennaio 2017

Cognome e nome:
Matricola:

1. Si applichi il teorema di Eulero per calcolare il resto della divisione di 4^{204} per 250.

   Soluzione: La funzione ϕ è moltiplicativa. Quindi

   $$\phi(250) = \phi(2 \times 5^3) = \phi(2) \times \phi(5^3) = 1 \times 5^3(1 - 1/5) = 5^3(4/5) = 25 \times 4 = 100.$$

   4 non è relativamente primo con 250 e quindi non possiamo applicare il teorema di Eulero. Procediamo in modo diverso. Si ha $4^{204} = 2^{408}$. Calcoliamo il resto della divisione di 2^{408} per 125. Ricordando che 2 e 125 sono relativamente primi, possiamo applicare il teorema di Eulero con $\phi(125) = 100$. Allora si ha: $2^{408} \equiv_{125} (2^{100})^4 \times 2^8 \equiv_{125} 256 \equiv_{125} 6$. Questo significa che esiste q (pari!) tale che $2^{408} = 125 \times q + 6$, che si può anche scrivere $2^{408} = 250 \times (q/2) + 6$. Ne segue la conclusione

   $$2^{408} \equiv_{250} 6.$$

2. Ai corsi di Matematica Discreta (MD) e Letteratura Italiana (LI) partecipano in tutto 60 studenti. 30 sono iscritti al corso di MD e 30 al corso di LI. Non vi sono quindi studenti che frequentano entrambi i corsi. Dobbiamo comporre una delegazione di 4 studenti tra i 60 partecipanti ai due corsi.

   (a) In quanti modi possiamo comporre la delegazione se non mettiamo alcun vincolo?

   (b) In quanti modi possiamo comporre la delegazione se essa è composta da due studenti di MD e due studenti di LI?

   (c) In quanti modi possiamo comporre la delegazione se essa è composta da uno studente di MD e tre studenti di LI?

   (d) In quanti modi possiamo comporre la delegazione se essa contiene almeno uno studente di MD?

   Soluzione (a) È pari al numero di sottoinsiemi di cardinalità 4 di un insieme di cardinalità 60: $\binom{60}{4}$.

   (b) $\binom{30}{2} \times \binom{30}{2}$.

   (c) $30 \times \binom{30}{3}$.

   (d) Sottraiamo al numero totale di possibili delegazioni quelle composte soltanto da studenti di LI: $\binom{60}{4} - \binom{30}{4}$.

3. Sia $\mathbb{N}$ l'insieme dei numeri naturali. Consideriamo la seguente relazione E sull'insieme $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ delle coppie ordinate di numeri naturali:

$$(a, b)E(c, d) \text{ sse } a + d = b + c,$$

dove $(a, b), (c, d) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$. Verificare che E è una relazione di equivalenza.

Soluzione P. riflessiva: $(a, b)E(a, b)$ sse $a + b = b + a$, che vale per la proprietà commutativa della somma.

P. simmetrica: supponiamo $(a, b)E(c, d)$, cioé $a + d = b + c$. Proviamo che $(c, d)E(a, b)$, cioé $c + b = d + a$. Vale sempre per la proprietà commutativa della somma.

P. transitiva: supponiamo $(a, b)E(c, d)$ e $(c, d)E(e, f)$. In altre parole, $a + d = b + c$ e $c + f = d + e$. Allora si ha:

$$a + f = (b + c - d) + (d + e - c) = b + (c - c) + (d - d) + e = b + e$$

che implica $(a, b)E(e, f)$.

4. Provare per induzione che, per ogni $n \geq 1$,

$$\sum_{k=1}^{n} k(k + 1) = n(n + 1)(n + 2)/3.$$

Soluzione $n = 1$: $\sum_{k=1}^{1} k(k+1) = 1\times(1+1) = 2$ ed inoltre $1(1+1)(1+2)/3 = 2$. Supponiamo per ipotesi d'induzione che $\sum_{k=1}^{n} k(k + 1) = n(n + 1)(n + 2)/3$. Proviamo l'uguaglianza per $n + 1$.

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n+1} k(k + 1) &= (\sum_{k=1}^{n} k(k + 1)) + (n + 1)(n + 2)\\ &=_{Ip.Ind.} \frac{n(n + 1)(n + 2)}{3} + (n + 1)(n + 2)\\ &= (n + 1)(n + 2)(\frac{n}{3} + 1) = (n + 1)(n + 2)(n + 3)/3.\end{aligned}$$

Il principio d'induzione permette di concludere che $\sum_{k=1}^{n} k(k + 1) = n(n + 1)(n + 2)/3$ per ogni $n \geq 1$.

5. Formalizzare nel linguaggio matematico i seguenti enunciati, specificando l'universo del discorso, i simboli di relazione e le eventuali costanti:

- Qualche partita di calcio è amata da qualche sportivo
- Non esistono partite di calcio amate da tutti gli sportivi

Soluzione Per entrambi gli enunciati consideriamo come universo l'insieme delle persone e delle partite di calcio. Per entrambi gli enunciati utilizzeremo due relazioni unarie S e C ed una relazione binaria A.

Nel primo caso associamo alle relazioni il seguente significato:

$S(x)$ sse x è uno sportivo.

xAy sse x ama y.

$C(x)$ sse x è una partita di calcio.

Il primo enunciato si formalizza nel modo seguente (non è l'unico!):

$$\exists x \exists y (C(x) \land S(y) \land yAx).$$

mentre il secondo enunciato si formalizza nel modo seguente (non è l'unico!):

$$\neg \exists x (C(x) \land \forall y (S(y) \to yAx)).$$