# Matematica Discreta (6 crediti) AAAAA

23 Gennaio 2017

Cognome e nome:
Matricola:

1. Si applichi il teorema di Eulero per calcolare il resto della divisione di $4^{243}$ per 225.

   Soluzione: La funzione $\phi$ è moltiplicativa. Quindi,

   $$\phi(225) = \phi(3^2 5^2) = \phi(3^2)\phi(5^2) = 3^2(1-(1/3))5^2(1-(1/5)) = 9\times(2/3)\times 25\times(4/5) = 6\times 20 = 120.$$

   In conclusione, si ha: $4^{243} = 4^{2\times 120+3} = (4^{120})^2 \times 4^3 \equiv_{225} 1^2 \times 4^3 = 64$.

2. Spiegare le quattro figure combinatorie (disposizioni/combinazioni con o senza ripetizione) utilizzando $n$ contenitori distinti (numerati da 1 ad $n$) e $k$ palline.

   Soluzione: Dobbiamo sistemare $k$ palline in $n$ contenitori distinguibili tra di loro.

   (1) Le palline sono distinguibili tra loro (per esempio, sono numerate da 1 a $k$) e si può mettere al più una pallina in ogni contenitore. Questo modello corrisponde alle disposizioni semplici di un insieme di $n$ elementi di ordine $k \leq n$.

   (2) Le palline sono distinguibili tra loro (per esempio, sono numerate da 1 a $k$) e si può mettere più di una pallina in ogni contenitore. Questo modello corrisponde alle disposizioni con ripetizione di un insieme di $n$ elementi di ordine $k$. Non vi è alcun vincolo tra $n$ e $k$.

   (3) Le palline sono indistinguibili tra loro e si può mettere al più una pallina in ogni contenitore. Questo modello corrisponde alle combinazioni semplici di un insieme di $n$ elementi di ordine $k \leq n$.

   (4) Le palline sono indistinguibili tra loro e si può mettere più di una pallina in ogni contenitore. Questo modello corrisponde alle combinazioni con ripetizione di un insieme di $n$ elementi di ordine $k$. Non vi è alcun vincolo tra $n$ e $k$.

3. Definiamo la seguente relazione binaria $E$ sull'insieme $\mathbb{N}^+$ dei numeri naturali positivi:

   $$xEy \text{ sse } x \text{ divide } y \text{ oppure } x < y + 2.$$

   Determinare se la relazione $E$ definisce un ordinamento parziale su $\mathbb{N}^+$.

   Soluzione: La relazione $E$ definisce un ordinamento parziale su $\mathbb{N}^+$ se verifica la proprietà riflessiva, transitiva e antisimmetrica.

P. Riflessiva: Dato un arbitrario numero naturale positivo $x$, si ha $xEx$ perché $x$ divide $x$.

P. Antisimmetrica: Non vale: 1 divide 2 e $2 < 1 + 2 = 3$, ma $1 \neq 2$. Quindi $1E2$ e $2E1$ con $1 \neq 2$.

P. transitiva: Non vale. Ecco un controesempio: $4E3$ e $3E2$ ma $4E2$ è falso. Infatti, $4 < 3+2$ e $3 < 2+2$, ma né 4 divide 2 né $4 < 2 + 2$.

In conclusione, $E$ non è un ordinamento parziale.

4. Provare per induzione che, per ogni $n \geq 1$, vale la seguente uguaglianza

$$\sum_{k=1}^{n} 2^k = 2(2^n - 1).$$

Soluzione: $n = 1$: $\sum_{k=1}^{1} 2^k = 2^1 = 2$ e $2(2^1 - 1) = 2(2 - 1) = 2$.

Supponiamo per ipotesi d'induzione che $\sum_{k=1}^{n} 2^k = 2(2^n - 1)$. Proviamo l'uguaglianza per $n + 1$.

$$\sum_{k=1}^{n+1} 2^k = (\sum_{k=1}^{n} 2^k) + 2^{n+1} =_{Ip.Ind.} 2(2^n - 1) + 2^{n+1} = 2(2^n - 1 + 2^n) = 2(2^{n+1} - 1).$$

Il principio d'induzione permette di concludere che $\sum_{k=1}^{n} 2^k = 2(2^n - 1)$ per ogni $n \geq 1$.

5. Formalizzare nel linguaggio matematico i seguenti enunciati, specificando l'universo del discorso, i simboli di relazione e le eventuali costanti:

   - Nessuno studente ama ogni corso
   - Marco ama tutti gli amici che non sono alti.

Soluzione: Per il primo enunciato consideriamo come universo l'insieme delle persone e dei corsi. Utilizzeremo due relazioni unarie $S$ e $C$ ed una relazione binaria $A$. Associamo alle relazioni il seguente significato:

$S(x)$ sse $x$ è uno studente.

$xAy$ sse $x$ ama $y$.

$C(x)$ sse $x$ è un corso.

Il primo enunciato si formalizza nel modo seguente (non è l'unico!):

$$\neg \exists x (S(x) \wedge \forall y (C(y) \rightarrow xAy)).$$

Per il secondo enunciato consideriamo come universo l'insieme delle persone. Utilizzeremo una costante $m$, una relazioni unaria $T$ e due relazioni binarie $A, F$. Associamo alle relazioni il seguente significato:

$m$ denota Marco.

$xAy$ sse $x$ ama $y$.

$xFy$ sse $x$ è un amico di $y$.

$T(x)$ sse $x$ è alto.

Il secondo enunciato si formalizza nel modo seguente (non è l'unico!):

$$\forall y((yFm \wedge \neg T(y)) \rightarrow mAy).$$