Matematica Discreta (6 crediti) BBBBB

7 Gennaio 2016

Cognome e nome:
Matricola:

1. Dimostrare per induzione che
$$n^2 \geq 3n + 2$$
per ogni $n \geq 4$.

<u>Soluzione</u>: Base dell'induzione $n = 4$: $4^2 = 16 \geq 3 * 4 + 2 = 14$. OK.

Supponiamo per ipotesi d'induzione che $n^2 \geq 3n+2$. Proviamo che $(n+1)^2 \geq 3(n+1)+2 = 3n + 5$.
$$(n+1)^2 = n^2 + 2n + 1 \geq_{\text{Ip.Ind.}} (3n+2) + (2n+1) =$$
$$= 5n + 3 = 3n + (2n+3) \geq_{(n\geq 4)} 3n + (2 * 4 + 3) = 3n + 11 \geq 3n + 5 = 3(n+1) + 2.$$
Il principio di induzione ci permette di concludere che $n^2 \geq 3n + 2$ vale per ogni $n \geq 4$.

2. Formalizzare nel linguaggio matematico i seguenti enunciati.

   - "Ogni studente ama qualche professore".
   - "Qualche studente non ama ogni professore".

<u>Soluzione</u>: Siano

- $S(x)$ sse x è uno studente
- $P(x)$ sse x è un professore
- $A(x, y)$ sse x ama y

$$\forall x(S(x) \rightarrow \exists y(P(y) \wedge A(x, y)))$$

La seconda frase è ambigua. Può essere formalizzata nei due modi seguenti con significato diverso:
$$\exists x(S(x) \wedge \forall y(P(y) \rightarrow \neg A(x, y)))$$
oppure
$$\exists x(S(x) \wedge \neg\forall y(P(y) \rightarrow A(x, y)))$$

3. Nel torneo di calcetto del quartiere si sono iscritti 8 giocatori. Bisogna formare due squadre, la squadra rossa e la squadra blu, scegliendo 4 giocatori per squadra. Quante sono le possibili squadre rosse? Quante sono le possibili partite "squadra rossa contro squadra blu", considerando diverse le partite in cui i giocatori delle due squadre sono diversi? Quante sono le partite fra due squadre senza nome formate con le stesse regole?

   Soluzione: Una squadra è formata da un insieme di 4 giocatori, quindi il numero di possibili formazioni della squadra rossa è pari a $\binom{8}{4}$. Data una squadra rossa, ossia un sorttinsieme di 4 elementi, la formazione della squadra blu è costituita dall'insieme complemento. Quindi le possibili partite "squadra rossa contro squadra blu" sono $\binom{8}{4}$.
   Se invece consideriamo due squadre "senza nome", allora le possibili partite sono solo $\frac{1}{2}\binom{8}{4}$, perché non c'è distinzione fra due partite con formazioni uguali.

4. Si risolva l'equazione

$$5x \equiv 7 \mod 29.$$

   Soluzione: 5 è relativamente primo con 29, e quindi sicuramente esiste l'inverso di 5 modulo 29. Considerando che $5 * 6 = 30 \equiv_{29} 1$, 6 è l'inverso di 5. Quindi per risolvere l'equazione basta moltiplicare ambo i membri per 7: $(5 * 6) * 7 = 5 * (6 * 7) \equiv_{29} 5 * 13 \equiv_{29} (1 * 7) = 7$, da cui $5 * 13 \equiv_{29} 7$ e $x = 13$.