

Esercizi di Strutture Discrete

Alberto Carraro

10/04/2006

Relazioni ed applicazioni

Esercizio 1 Sia A un insieme ed S, T due relazioni su A . Definiamo

$$S \cap T = \{(x, y) \in A \times A \mid (x, y) \in S \text{ e } (x, y) \in T\}$$

$$S \cup T = \{(x, y) \in A \times A \mid (x, y) \in S \text{ o } (x, y) \in T\}$$

$$S^{-1} = \{(x, y) \in A \times A \mid (y, x) \in S\}$$

Dimostrare che

a) $(S \cap T)^{-1} = S^{-1} \cap T^{-1}$

b) $(S \cup T)^{-1} = S^{-1} \cup T^{-1}$

Soluzione

a)

$$\begin{aligned} (S \cap T)^{-1} &= \{(x, y) \in A \times A \mid (y, x) \in (S \cap T)\} \\ &= \{(x, y) \in A \times A \mid (y, x) \in S \text{ e } (y, x) \in T\} \\ &= \{(x, y) \in A \times A \mid (y, x) \in S\} \cap \{(x, y) \in A \times A \mid (y, x) \in T\} \\ &= S^{-1} \cap T^{-1} \end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned} (S \cup T)^{-1} &= \{(x, y) \in A \times A \mid (y, x) \in (S \cup T)\} \\ &= \{(x, y) \in A \times A \mid (y, x) \in S \text{ o } (y, x) \in T\} \\ &= \{(x, y) \in A \times A \mid (y, x) \in S\} \cup \{(x, y) \in A \times A \mid (y, x) \in T\} \\ &= S^{-1} \cup T^{-1} \end{aligned}$$

Esercizio 2 Sia $f : X \times X \rightarrow X$ tale che

$$f(x, y) = f(y, x) \text{ (commutatività)}$$

$$f(x, f(y, z)) = f(f(x, y), z) \text{ (associatività)}$$

$$f(x, x) = x \text{ (idempotenza)}$$

Sia ρ una relazione così definita: $x \rho y$ sse $x = f(x, y)$. Dimostrare che

- a) ρ è una relazione di equivalenza
 b) per ogni $x, y \in X : f(x, y)\rho x$ e $f(x, y)\rho y$
 c) se $z\rho x$ e $z\rho y$ allora $z\rho f(x, y)$

Soluzione

- a) Riflessività di ρ

$$x = f(x, x) \quad (\text{idempotenza di } f)$$

Transitività di ρ

Assumiamo

1. $x = f(x, y)$
2. $y = f(y, z)$

$$\begin{aligned} x &= f(x, y) && (\text{ipotesi 1}) \\ &= f(x, f(y, z)) && (\text{ipotesi 2}) \\ &= f(f(x, y), z) && (\text{associatività di } f) \\ &= f(x, z) && (\text{ipotesi 1}) \end{aligned}$$

Antisimmetria di ρ

Assumiamo

1. $x = f(x, y)$
2. $y = f(y, x)$

$$\begin{aligned} x &= f(x, y) && (\text{ipotesi 1}) \\ &= f(x, f(y, x)) && (\text{ipotesi 2}) \\ &= f(f(x, y), x) && (\text{associatività di } f) \\ &= f(f(y, x), x) && (\text{commutatività di } f) \\ &= f(y, x) && (\text{ipotesi 2}) \\ &= y \end{aligned}$$

- b) $f(x, y) = f(f(x, y), x)$?

$$\begin{aligned} f(f(x, y), x) &= f(x, f(y, x)) && (\text{associatività di } f) \\ &= f(x, f(x, y)) && (\text{commutatività di } f) \\ &= f(f(x, x), y) && (\text{associatività di } f) \\ &= f(x, y) && (\text{idempotenza di } f) \end{aligned}$$

- $f(x, y) = f(f(x, y), y)$?

$$\begin{aligned} f(f(x, y), y) &= f(x, f(y, y)) && (\text{associatività di } f) \\ &= f(x, y) && (\text{idempotenza di } f) \end{aligned}$$

c) Assumiamo

1. $z = f(z, x)$
2. $z = f(z, y)$

$$\begin{aligned} z &= f(z, y) && \text{(ipotesi 2)} \\ &= f(f(z, x), y) && \text{(ipotesi 1)} \\ &= f(z, f(x, y)) && \text{(associatività di } f) \end{aligned}$$

Esercizio 3 Sia $f : S \rightarrow T$ suriettiva. Dimostrare che
 $\forall V, W \subseteq T$ si ha: $f^{-1}(V) \subseteq f^{-1}(W)$ sse $V \subseteq W$

Soluzione

(\Rightarrow) Assumiamo $f^{-1}(V) \subseteq f^{-1}(W)$. Sia $v \in V$.

$$\begin{aligned} \exists s \in S. (v = f(s)) &&& \text{(suriettività di } f) \\ s \in f^{-1}(V) &&& \text{(def di } f^{-1}) \\ s \in f^{-1}(W) &&& \text{(} f^{-1}(V) \subseteq f^{-1}(W) \text{)} \\ f(s) \in W &&& \text{(def di } f^{-1}) \\ v \in W &&& \end{aligned}$$

(\Leftarrow) Assumiamo $V \subseteq W$. Sia $s \in f^{-1}(V)$.

$$\begin{aligned} \exists v \in V. (s = f^{-1}(v)) &&& \text{(def di } f^{-1}(V)) \\ v \in W &&& \text{(} V \subseteq W \text{)} \\ s \in f^{-1}(W) &&& \end{aligned}$$

Esercizio 4 Sia $f : S \rightarrow T$. Dimostrare che
se f è iniettiva allora $\forall V, W \subseteq S$ si ha: $f(V \cap W) = f(V) \cap f(W)$

Soluzione

(\subseteq) Sia $y \in f(V \cap W)$.

$$\begin{aligned} \exists x \in (V \cap W). (f(x) = y) &&& \text{(def di } f(V \cap W)) \\ y = f(x) \in f(V) &&& \text{(} x \in V \text{)} \\ y = f(x) \in f(W) &&& \text{(} x \in W \text{)} \\ y \in f(V) \cap f(W) &&& \end{aligned}$$

(\supseteq) Sia $y \in f(V) \cap f(W)$.

$$\begin{aligned} \exists x \in V. (y = f(x)) &&& \text{(def di } f(V)) \\ \exists z \in W. (y = f(z)) &&& \text{(def di } f(W)) \\ y = f(x) = f(z) \text{ implica } x = z &&& \text{(iniettività di } f) \\ x \in (V \cap W) &&& \\ y = f(x) \in f(V \cap W) &&& \end{aligned}$$

Esercizio 5 Sia $f : A \rightarrow A$. Consideriamo la funzione $f : \mathcal{P}(A) \rightarrow \mathcal{P}(A)$ così definita: $f^*(X) = \{f(x) \mid x \in X\}$. Si dimostri che

a) f è iniettiva sse f^* è iniettiva

b) f è suriettiva sse f^* è suriettiva

c) $\forall f, g$ funzioni da A in $A : (f \circ g)^* = f^* \circ g^*$

Soluzione

a) (\Rightarrow) Assumiamo f iniettiva. Dimostriamo $f^*(X) = f^*(Y) \Rightarrow X = Y$.

Sia $x \in X$.

$$\begin{aligned} f(x) &\in f^*(X) && () \\ f(x) &\in f^*(Y) && (\text{per l'ipotesi}) \\ x &\in Y && (\text{def di } f^*(Y)) \end{aligned}$$

Sia $y \in Y$.

$$\begin{aligned} f(y) &\in f^*(Y) && () \\ f(y) &\in f^*(X) && (\text{per l'ipotesi}) \\ y &\in X && (\text{def di } f^*(X)) \end{aligned}$$

(\Leftarrow) Assumiamo f^* iniettiva. Dimostriamo $f(x) = f(y) \Rightarrow x = y$. Siano $x, y \in A$.

$$\begin{aligned} f^*(x) &= f(x) && (\text{def di } f^*) \\ f^*(y) &= f(y) && (\text{def di } f^*) \\ f^*(x) &= f^*(y) \Rightarrow x = y && (\text{iniettività di } f^*) \\ x &= y \end{aligned}$$

b) (\Rightarrow) Assumiamo f suriettiva. Dimostriamo $\forall Y \in \mathcal{P}(A). \exists X \in \mathcal{P}(A). (f^*(X) = Y)$. Sia $Y \in \mathcal{P}(A)$.

$$\begin{aligned} \forall y \in Y. \exists x \in A. (f(x) = y) &&& (f \text{ iniettiva}) \\ X = \bigcup_{y \in Y} \{x \in A \mid f(x) = y\} &= [f^*(Y)]^{-1} \\ f^*(X) &= Y \end{aligned}$$

(\Leftarrow) Assumiamo f^* suriettiva. Dimostriamo $\forall y \in A. \exists x \in A. (f(x) = y)$.
Sia $y \in A$.

$$\begin{aligned} y &\in \mathcal{P}(A) \\ \exists X \subseteq A. (\{y\} = f^*(X)) &&& (f^* \text{ suriettiva}) \\ f^*(X) &= \{y\} \neq \emptyset \\ \exists x \in A. (f(x) = y). \end{aligned}$$

c)

$$\begin{aligned} (f^* \circ g^*)(X) &= f^*(g^*(X)) \\ &= \{f(y) \mid y \in g^*(X)\} \\ &= \{f(y) \mid y = g(x), x \in X\} \\ &= \{f(g(x)) \mid x \in X\} \\ &= (f \circ g)^*(X) \end{aligned}$$