Esercizi di Strutture Discrete

Alberto Carraro

10/04/2006

Relazioni ed applicazioni

Esercizio 1 *Sia A un insieme ed S, T due relazioni su A. Definiamo*

$S \cap T = \{(x,y) \in A \times A \mid (x,y) \in S \text{ e } (x,y) \in T\}$

$S \cup T = \{(x,y) \in A \times A \mid (x,y) \in S \text{ o } (x,y) \in T\}$

$S^{-1} = \{(x,y) \in A \times A \mid (y,x) \in S\}$

Dimostrare che

a) $(S \cap T)^{-1} = S^{-1} \cap T^{-1}$

b) $(S \cup T)^{-1} = S^{-1} \cup T^{-1}$

Soluzione

a)

$$\begin{aligned}
(S \cap T)^{-1} &= \{(x,y) \in A \times A \mid (y,x) \in (S \cap T)\} \\
&= \{(x,y) \in A \times A \mid (y,x) \in S \text{ e } (y,x) \in T\} \\
&= \{(x,y) \in A \times A \mid (y,x) \in S\} \cap \{(x,y) \in A \times A \mid (y,x) \in T\} \\
&= S^{-1} \cap T^{-1}
\end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned}
(S \cup T)^{-1} &= \{(x,y) \in A \times A \mid (y,x) \in (S \cup T)\} \\
&= \{(x,y) \in A \times A \mid (y,x) \in S \text{ o } (y,x) \in T\} \\
&= \{(x,y) \in A \times A \mid (y,x) \in S\} \cup \{(x,y) \in A \times A \mid (y,x) \in T\} \\
&= S^{-1} \cup T^{-1}
\end{aligned}$$

Esercizio 2 *Sia $f : X \times X \to X$ tale che*

$f(x,y) = f(y,x)$ *(commutatività)*

$f(x, f(y,z)) = f(f(x,y), z)$ *(associatività)*

$f(x,x) = x$ *(idempotenza)*

Sia ϱ una relazione così definita: $x \varrho y$ sse $x = f(x,y)$. Dimostrare che *a)* ϱ *è una relazione di equivalenza*

b) per ogni $x, y \in X$: $f(x,y)\varrho x$ *e* $f(x,y)\varrho y$

c) se $z\varrho x$ *e* $z\varrho y$ *allora* $z\varrho f(x,y)$

Soluzione

a) Riflessività di ϱ

$$x = f(x,x) \qquad \text{(idempotenza di } f\text{)}$$

Transitività di ϱ
Assumiamo

1. $x = f(x,y)$
2. $y = f(y,z)$

$$\begin{aligned}
x &= f(x,y) && \text{(ipotesi 1)}\\
&= f(x, f(y,z)) && \text{(ipotesi 2)}\\
&= f(f(x,y), z)) && \text{(associatività di } f\text{)}\\
&= f(x,z) && \text{(ipotesi 1)}
\end{aligned}$$

Antisimmetria di ϱ
Assumiamo

1. $x = f(x,y)$
2. $y = f(y,x)$

$$\begin{aligned}
x &= f(x,y) && \text{(ipotesi 1)}\\
&= f(x, f(y,x)) && \text{(ipotesi 2)}\\
&= f(f(x,y), x)) && \text{(associatività di } f\text{)}\\
&= f(f(y,x), x)) && \text{(commutatività di } f\text{)}\\
&= f(y,x) && \text{(ipotesi 2)}\\
&= y
\end{aligned}$$

b) $f(x,y) = f(f(x,y),x)$?

$$\begin{aligned}
f(f(x,y),x) &= f(x, f(y,x)) && \text{(associatività di } f\text{)}\\
&= f(x, f(x,y)) && \text{(commutatività di } f\text{)}\\
&= f(f(x,x), y)) && \text{(associatività di } f\text{)}\\
&= f(x,y) && \text{(idempotenza di } f\text{)}
\end{aligned}$$

$f(x,y) = f(f(x,y),y)$?

$$\begin{aligned}
f(f(x,y),y) &= f(x, f(y,y)) && \text{(associatività di } f\text{)}\\
&= f(x,y) && \text{(idempotenza di } f\text{)}
\end{aligned}$$

c) Assumiamo

1. $z = f(z, x)$
2. $z = f(z, y)$

$$
\begin{aligned}
z &= f(z, y) && \text{(ipotesi 2)} \\
&= f(f(z, x), y) && \text{(ipotesi 1)} \\
&= f(z, f(x, y)) && \text{(associatività di } f\text{)}
\end{aligned}
$$

Esercizio 3 *Sia $f : S \to T$ suriettiva. Dimostrare che*
$\forall\ V, W \subseteq T$ si ha: $f^{\leftarrow}(V) \subseteq f^{\leftarrow}(W)$ sse $V \subseteq W$

Soluzione

($\Rightarrow$) Assumiamo $f^{\leftarrow}(V) \subseteq f^{\leftarrow}(W)$. Sia $v \in V$.

$$
\begin{array}{ll}
\exists s \in S.(v = f(s)) & \text{(suriettività di } f\text{)} \\
s \in f^{\leftarrow}(V) & \text{(def di } f^{\leftarrow}\text{)} \\
s \in f^{\leftarrow}(W) & (f^{\leftarrow}(V) \subseteq f^{\leftarrow}(W)) \\
f(s) \in W & \text{(def di } f^{\leftarrow}\text{)} \\
v \in W &
\end{array}
$$

($\Leftarrow$) Assumiamo $V \subseteq W$. Sia $s \in f^{\leftarrow}(V)$.

$$
\begin{array}{ll}
\exists v \in V.(s = f^{\leftarrow}(v)) & \text{(def di } f^{\leftarrow}(V)\text{)} \\
v \in W & (V \subseteq W) \\
s \in f^{\leftarrow}(W) &
\end{array}
$$

Esercizio 4 *Sia $f : S \to T$. Dimostrare che*
se f è iniettiva allora $\forall\ V, W \subseteq S$ si ha: $f(V \cap W) = f(V) \cap f(W)$

Soluzione

($\subseteq$) Sia $y \in f(V \cap W)$.

$$
\begin{array}{ll}
\exists x \in (V \cap W).(f(x) = y) & \text{(def di } f(V \cap W)\text{)} \\
y = f(x) \in f(V) & (x \in V) \\
y = f(x) \in f(W) & (x \in W) \\
y \in f(V) \cap f(W) &
\end{array}
$$

($\supseteq$) Sia $y \in f(V) \cap f(W)$.

$$
\begin{array}{ll}
\exists x \in V.(y = f(x)) & \text{(def di } f(V)\text{)} \\
\exists z \in W.(y = f(z)) & \text{(def di } f(W)\text{)} \\
y = f(x) = f(z) \text{ implica } x = z & \text{(iniettività di } f\text{)} \\
x \in (V \cap W) & \\
y = f(x) \in f(V \cap W) &
\end{array}
$$

Esercizio 5 *Sia $f : A \to A$. Consideriamo la funzione $f : \mathcal{P}(A) \to \mathcal{P}(A)$ così definita: $f^*(X) = \{f(x) \mid x \in X\}$. Si dimostri che* *a) f è iniettiva sse f^* è iniettiva*

b) f è suriettiva sse f^* è suriettiva

c) $\forall\ f, g$ funzioni da A in A : $(f \circ g)^* = f^* \circ g^*$

Soluzione

a) **(⇒)** Assumiamo f iniettiva. Dimostriamo $f^*(X) = f^*(Y) \Rightarrow X = Y$. Sia $x \in X$.

$$\begin{array}{ll} f(x) \in f^*(X) & \text{()} \\ f(x) \in f^*(Y) & \text{(per l'ipotesi)} \\ x \in Y & \text{(def di } f^*(Y)\text{)} \end{array}$$

Sia $y \in Y$.

$$\begin{array}{ll} f(y) \in f^*(Y) & \text{()} \\ f(y) \in f^*(X) & \text{(per l'ipotesi)} \\ y \in X & \text{(def di } f^*(X)\text{)} \end{array}$$

(⇐) Assumiamo f^* iniettiva. Dimostriamo $f(x) = f(y) \Rightarrow x = y$. Siano $x, y \in A$.

$$\begin{array}{ll} f^*(x) = f(x) & \text{(def di } f^*\text{)} \\ f^*(y) = f(y) & \text{(def di } f^*\text{)} \\ f^*(x) = f^*(y) \Rightarrow x = y & \text{(iniettività di } f^*\text{)} \\ x = y & \end{array}$$

b) **(⇒)** Assumiamo f suriettiva. Dimostriamo $\forall Y \in \mathcal{P}(A).\exists X \in \mathcal{P}(A).(f^*(X) = Y)$. Sia $Y \in \mathcal{P}(A)$.

$$\begin{array}{ll} \forall y \in Y.\exists x \in A.(f(x) = y) & (f \text{ iniettiva}) \\ X = \bigcup_{y \in Y}\{x \in A \mid f(x) = y\} = [f^*(Y)]^{-1} & \\ f^*(X) = Y & \end{array}$$

(⇐) Assumiamo f^* suriettiva. Dimostriamo $\forall y \in A.\exists x \in A.(f(x) = y)$. Sia $y \in A$.

$$\begin{array}{ll} y \in \mathcal{P}(A) & \\ \exists X \subseteq A.(\{y\} = f^*(X)) & (f^* \text{ suriettiva}) \\ f^*(X) = \{y\} \neq \emptyset & \\ \exists x \in A.(f(x) = y). & \end{array}$$

c)

$$\begin{aligned} (f^* \circ g^*)(X) &= f^*(g^*(X)) \\ &= \{f(y) \mid y \in g^*(X)\}) \\ &= \{f(y) \mid y = g(X), x \in X\}) \\ &= \{f(g(x)) \mid x \in X\} \\ &= (f \circ g)^*(X) \end{aligned}$$