Storia e filosofia della scienza

Prof. Marcello Pelillo

(a.a. 2008/09)

Gli sviluppi della logica e della geometria

M. C. Escher, *Rettili* (litografia, 1943)

Dagli stoici a Frege

Due millenni dopo Aristotele

« Che la logica abbia seguito questo sicuro cammino fin dai tempi più antichi, si rileva dal fatto che, a cominciare da Aristotele, non ha dovuto fare nessun passo indietro

[…]

Notevole è ancora il fatto che sin oggi la logica non ha potuto fare un passo innanzi, di modo che, secondo ogni apparenza, essa è da ritenersi come chiusa e completa. »

Immanuel Kant

Critica della ragion pura, 2ª ed. (1787)

Limiti della sillogistica aristotelica

- Proposizioni della forma soggetto-predicato
  (p. es., non copre inferenze del tipo: Se $a > b$ e $b > c$, allora $a > c$)

- Logica dei termini (non delle proposizioni)
  (p. es., non copre il *modus ponens*: Da p e $p \rightarrow q$ segue q)

« Siffatte critiche sono senz'altro giuste e dimostrano che la logica aristotelica non esaurisce tutti i tipi di ragionamento umano; nulla tolgono però ai meriti di questa, se teniamo presente che —ento i limiti dei problemi considerati — essa raggiunge un rigore così alto da parere quasi insuperabile. »

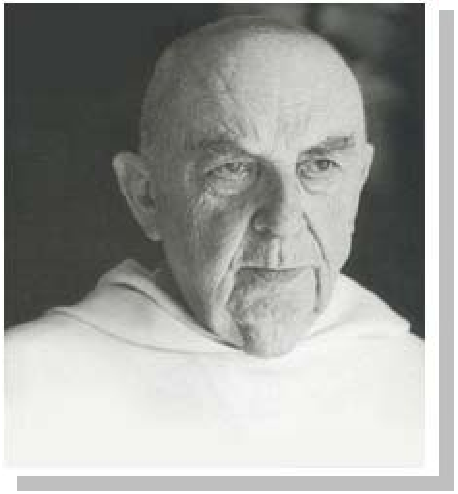
Ludovico Geymonat

Storia del pensiero filosofico e scientifico (1970)

La logica degli stoici

« Leggendo i frammenti megarico-stoici la prima impressione che si ricava è che ci sia qualche cosa di diverso dalla logica aristotelica: la terminologia, le leggi, lo stesso corpo di problemi, tutto è diverso. In aggiunta a ciò ci troviamo di fronte a una nuova tecnica logica.

Le differenze più vistose consistono nel fatto che, in primo luogo, la logica megarico-stoica è principalmente una logica delle proposizioni e non dei termini e, in secondo luogo, nel fatto che è costituita esclusivamente di regole, e non di leggi come gli *Analitici primi*. »



Joseph M. Bocheński, *La logica formale* (1956)

I "ragionamenti indimostrati"

Gli Stoici sognano un gran numero di ragionamenti indimostrati, ma ne espongono specialmente questi cinque, ai quali sembrano ridursi tutti i rimanenti:

1) quello che dalla connessione e dall'antecedente conclude il conseguente, come "Se è giorno, c'è luce. Ma è giorno. Dunque c'è luce.
2) Quello che dalla connessione e dal contrario del conseguente conclude il contrario dell'antecedente, come: "Se è giorno, c'è luce. Ma non c'è luce. Dunque non è giorno".
3) Quello che da un collegamento negativo e da una delle parti del collegamento conclude il contrario dell'altra parte, come "Non è giorno e notte. Ma è giorno. Dunque non è notte".
4) Quello che da un collegamento disgiuntivo e da una delle parti collegate conclude il contrario dell'altra, come "O è giorno o è notte. Ma è giorno. Dunque non è notte".
5) Quello che da un collegamento disgiuntivo e dal contrario di una delle parti collegate conclude l'altra, come: "O è giorno, o è notte, ma non è notte. Dunque è giorno".

Sesto Empirico, *Schizzi pirroniani*

In notazione moderna …

(R1)	$A \to B,\ A \vdash B$	*modus ponens*
(R2)	$A \to B,\ \neg B \vdash \neg A$	*rule of contraposition*
(R3)	$\neg(A \land B),\ A \vdash \neg B$	*disjunctive syllogism*
(R3′)	$\neg(A \land B),\ B \vdash \neg A$	
(R4)	$A \veebar B,\ A \vdash \neg B$	*rules for the (excluding) disjunction*
(R4′)	$A \veebar B,\ B \vdash \neg A$	
(R5)	$A \veebar B,\ \neg A \vdash B$	
(R5′)	$A \veebar B,\ \neg B \vdash A$	

L'implicazione filoniana

p	q	$p \to q$
1	1	1
1	0	0
0	1	1
0	0	1

« Filone diceva che la connessione [il condizionale] è vera quando non accade che cominci col vero e finisca col falso. Secondo lui ci sono perciò tre modi per ottenere una connessione vera e uno solo per ottenerne una falsa. E' vera infatti se comincia col vero e finisce col vero, come per esempio: "se è giorno, c'è luce"; se comincia col falso e finisce col falso, come, per esempio: "se la terra vola, la terra ha le ali"; analogamente per quella che comincia col falso e finisce col vero, come, per esempio, "se la terra vola, la terra esiste". E' falsa soltanto quando, cominciando col vero, finisce col falso, come ad esempio: "se è giorno, allora è notte" »

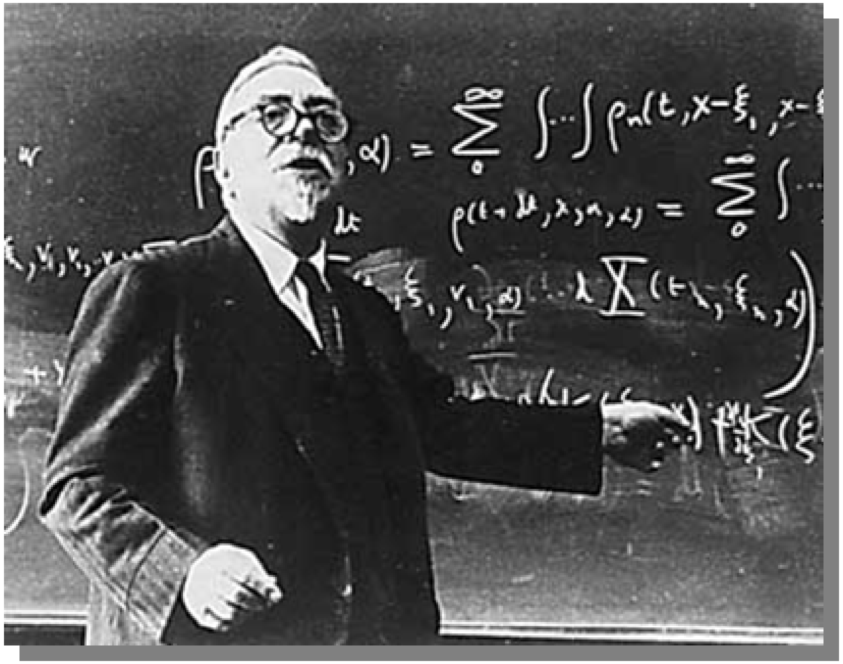
Sesto Empirico

(tratto da Joseph M. Bocheński, *La logica formale. Dai presocratici a Leibniz*, 1956)

Il progetto di Leibniz

« The history of the modern computing machine goes back to Leibniz and Pascal. Indeed, the general idea of a computing machine is nothing but a mechanization of Leibniz's **calculus ratiocinator**.»

Norbert Wiener, 1948



Calculemus!

« Io penso che mai le controversie possono essere condotte a termine e che mai si può imporre silenzio alle sette se non siamo ricondotti dai ragionamenti complicati ai calcoli semplici, dai vocaboli di significato incerto e vago a caratteri determinati

[...]

Si deve fare in modo che ogni paralogismo non sia null’altro che un errore di calcolo

[...]

Fatto ciò, quando sorgano controversie non ci sarà più bisogno di dispute fra due filosofi di quanto non ce ne sia fra due computisti. Basterà infatti prendere la penna, sedersi all’abaco e dirsi vicendevolmente: calcoliamo! »

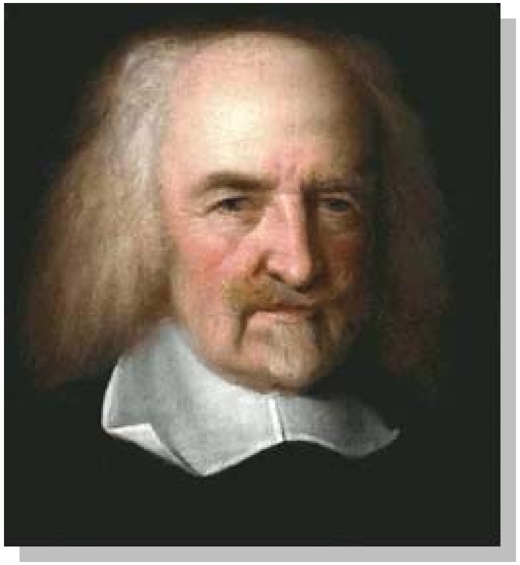
Gottfried W. Leibniz

L’eredità di Hobbes (1588-1679)

« Quel profondissimo scrutatore dei principi in tutte le cose che fu Thomas Hobbes, sostenne giustamente che ogni operazione della nostra mente è un calcolo e che da essa si ottiene o la somma addizionando o la differenza, sottraendo […]

Come sono dunque due i segni primari degli algebristi e degli analisti, il + e il -, così due sono le copule, è e non-è: nel primo caso la mente compone, nel secondo divide. »

G. W. Leibniz, *De arte combinatoria*, 1666



Un frammento di calcolo logico

DEFINIZIONE 3 [Dire che] A è in L o che L contiene A è lo stesso che dire che L può essere fatto coincidere con una pluralità di termini, assunti insieme, uno dei quali è A. $B \oplus N = L$ significa che B è in L e che B e N insieme compongono o costituiscono L. Questo vale anche di un numero di termini più grande.

ASSIOMA 1 $B \oplus N = N \oplus B$.

POSTULATO Più termini qualsiasi come A e B possono essere assunti insieme per comporre un termine solo $A \oplus B$.

ASSIOMA 2 $A \oplus A = A$.

PROPOSIZIONE 5 *Se A è in B e $A = C$, C è in B.*
Infatti, sostituendo C ad A nella proposizione A *è in* B, si ottiene C *è in* B.

PROPOSIZIONE 6 *Se C è in B e $A = B$, C è in A.*
Infatti, sostituendo A a B nella proposizione C *è in* B, si ottiene C *è in* A.

PROPOSIZIONE 7 *A è in A.*
Infatti A è in $A \oplus A$ (per la definizione 3), e quindi (per la proposizione 6) A è in A.

...

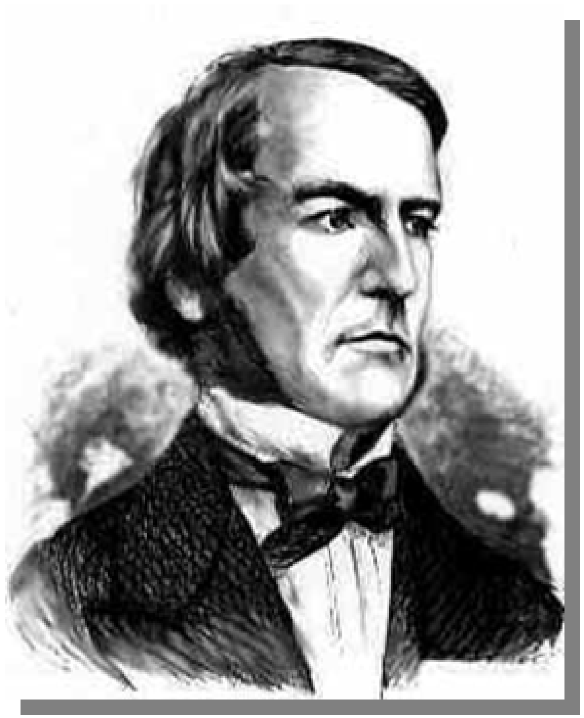
PROPOSIZIONE 20 *Se A è in M e B è in N, $A \oplus B$ è in $M \oplus N$.*

Frammento di un calcolo logico di Leibniz.

Le "leggi del pensiero" di George Boole (1815-1864)

« Lo scopo di questo trattato è l'indagare le leggi fondamentali di quelle operazioni della mente per mezzo delle quali si attua il ragionamento. »

George Boole
Indagine sulle leggi del pensiero (1854)



Le operazioni del linguaggio, in quanto strumenti del ragionamento, possono essere condotte per mezzo di un sistema di segni composto dai seguenti elementi;

1) simboli letterali, come x, y, ecc., che rappresentano cose in quanto oggetti dei nostri atti di concezione.

2) Segni di operazioni, come +, -, ×, che stanno per quelle operazioni della mente per mezzo delle quali le concezioni delle cose vengono combinate o scomposte in modo da formare nuove concezioni, che contengono gli stessi elementi.

3) Il segno di identità: =

Simboli, operatori e proprietà

- 1 il dominio del discorso (l'universo) [VERO]
- 0 il nulla (insieme vuoto) [FALSO]

- x la classe X
- 1-x la classe non-X (tutti i membri del dominio che non sono X)

- xy la classe i cui membri sono sia X che Y
- x+y la classe i cui membri sono X o Y

- $xy = yx$ *proprietà commutativa del prodotto*
- $x+y=y+x$ *proprietà commutativa della addizione*
- $z(x+y)=zx+zy$ *proprietà distributiva della moltiplicazione rispetto all'addizione*
- $x^2=x$ *idempotenza*

Derivazione del “principio” di non contraddizione

Dalla legge dell’idempotenza

$$x^2=x$$

si deriva:

$$x\,(1-x) = 0$$

La formula rappresenta « l'impossibilità, per un essere, di possedere e non possedere una medesima qualità nel medesimo tempo. Ma questo è esattamente quel principio di contraddizione che Aristotele ha descritto come l'assioma fondamentale di tutta la filosofia […]. Quello che è stato comunemente ritenuto l'assioma fondamentale della metafisica non è altro che la conseguenza di una legge del pensiero, matematica quanto alla sua forma. »

George Boole, *Le leggi del pensiero* (1854)

Derivazione dei sillogismi aristotelici

Barbara:

Ogni x è y	$x(1-y) = 0$ [$x=xy$]
Ogni y è z	$y(1-z) = 0$ [$y=yz$]
--------------	-----------------------
Ogni x è z	$x(1-z) = 0$ [$x=xz$]

Infatti: $x = xy = x(yz) = (xy)z = xz$

Celarent:

Nessun X è Y	$xy=0$
Ogni Z è Y	$z=zy$ [$z(1-y) = 0$]
------------------	-----------------------
Nessun X è Z	$xz=0$

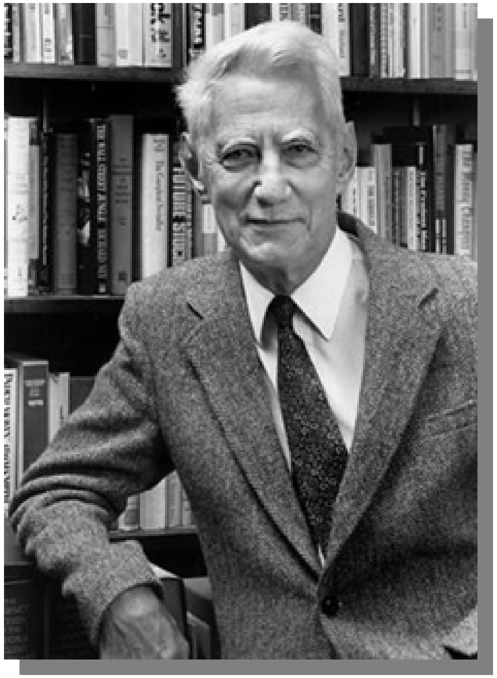
Infatti: $xz = x(zy) = x(yz) = (xy)z = 0z = 0$

Le proposizioni secondarie

« Retrospettivamente, è difficile capire come mai tanti pensassero che il ragionamento sillogistico esaurisse l'intera logica, e Boole criticò questa idea con parole veramente sferzanti, sottolineando che gran parte del ragionamento ordinario richiedeva quelle che egli chiamava proposizioni secondarie, cioè proposizioni esprimenti relazioni fra altre proposizioni. »

Martin Davis, *Il calcolatore universale* (2000)

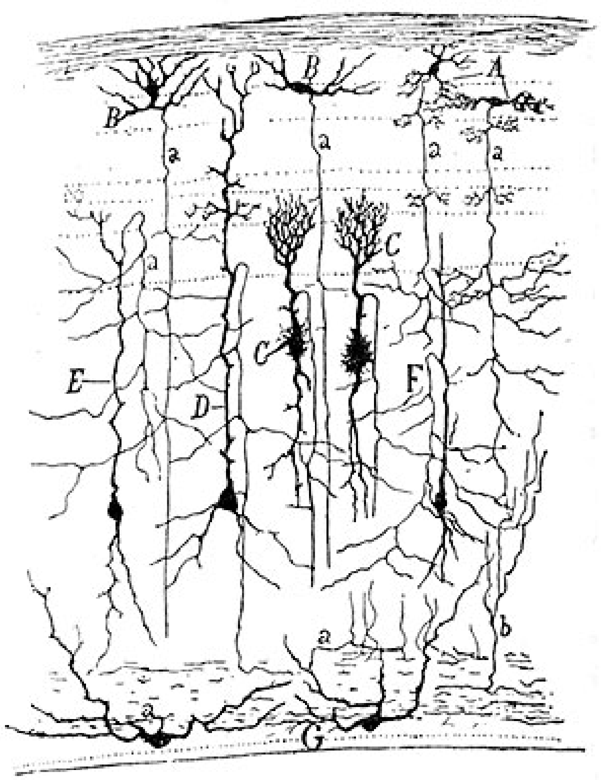
Claude Shannon (1916–2000): Il padre dell’era digitale

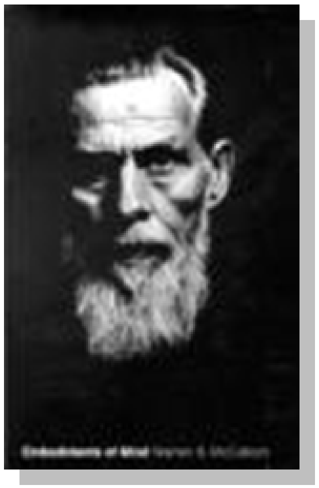


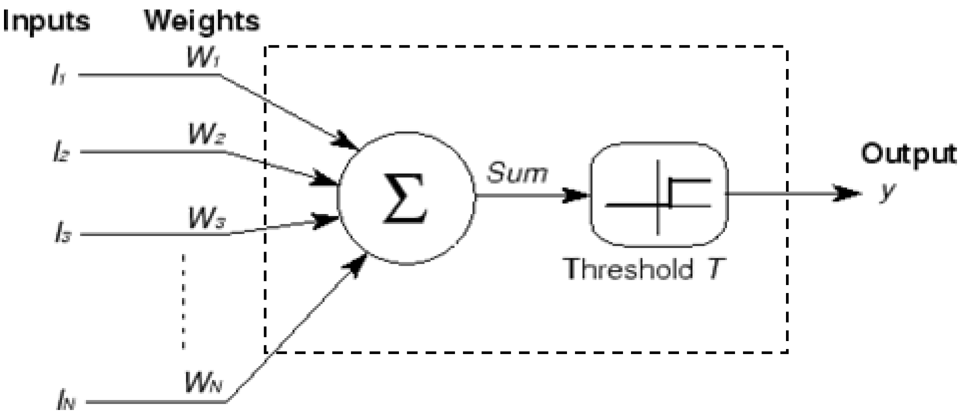
« Claude E. Shannon, the founder of what is often called Information Theory, in his master’s thesis [1937] showed in a masterful way how the analysis of complicated circuits for switching could be affected by the use of Boolean algebra. This surely must be one of the most important master's theses ever written […]
The paper was a landmark in that it helped to change digital circuit design from an art to a science. »

Hermann Goldstine

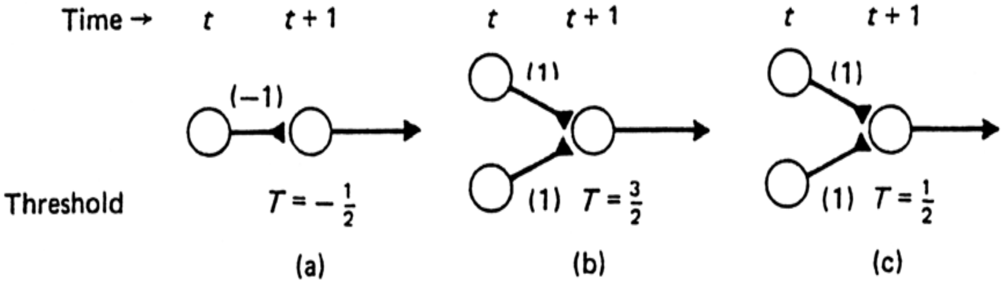
Il “neurone” di McCulloch e Pitts (1943)



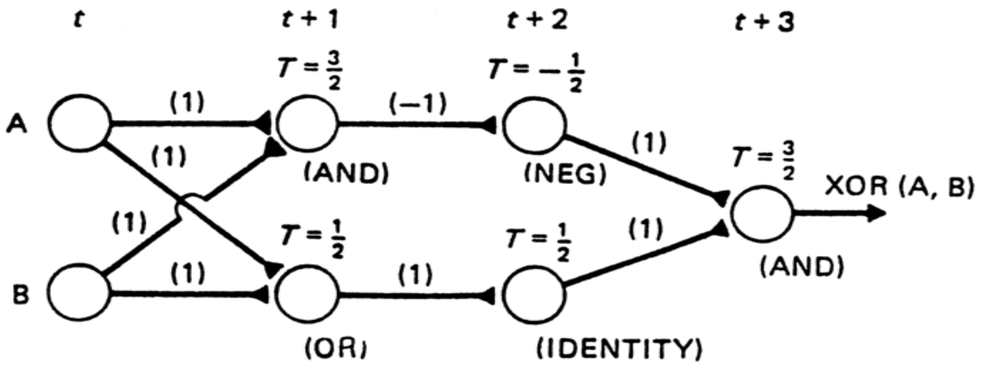




Reti “neurali” e calcolo proposizionale

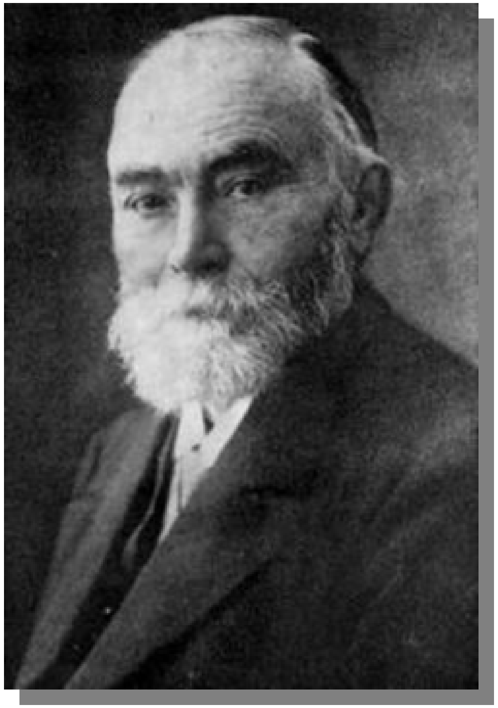


Tre operazioni logiche elementari (a) **negation**, (b) **and**, (c) **or**.



La construzione dello **or esclusivo**

L'*Ideografia* di Gottlob Frege (1879)



« Credo di poter rendere nel modo più chiaro il rapporto della mia ideografia con la lingua di tutti i giorni, **paragonandolo al rapporto esistente tra il microscopio e l'occhio**.

Quest'ultimo, per l'estensione della sua applicabilità, per la rapidità con la quale sa adattarsi alle più disparate circostanze, ha una grande superiorità nei confronti del microscopio.

Considerato però come apparecchio ottico, esso rivela certamente parecchie imperfezioni che di solito passano inosservate solo in conseguenza del suo intimo collegamento con la vita spirituale. »

Gottlob Frege, *Ideografia* (1879)

Un nuovo linguaggio

Frege analizza l'enunciato:

"tutti i cavalli sono mammiferi"

usando la relazione logica *se… allora…* :

"*se* x è un cavallo, *allora* x è un mammifero"

Utilizzando il quantificatore universale "$\forall$" si ha:

$(\forall x)$ (*se* x è un cavallo, *allora* x è un mammifero)

Più brevemente:

$(\forall x)\ (\ \text{cavallo}(x) \supset \text{mammifero}(x)\ )$

Un nuovo linguaggio

Frege analizza l'enunciato:

"alcuni cavalli sono purosangue"

usando la relazione logica ... *e* … :

"*x* è un cavallo *e* *x* è un purosangue"

Utilizzando il quantificatore esistenziale "$\exists$" si ha:

$(\exists x)$ (*x* è un cavallo *e* *x* è un purosangue)

Più brevemente:

$(\exists x)\ (\ \mathrm{cavallo}(x) \wedge \mathrm{purosangue}(x)\ )$

Alla fine del primo capitolo della *Ideografia* Frege presenta la tavola delle opposizioni aristoteliche con la sua scrittura:

(A)	**Tutti gli F sono G**	$\forall x\ (\mathrm{F}(x) \supset \mathrm{G}(x))$
(E)	**Nessun F è G**	$\forall x\ (\mathrm{F}(x) \supset \neg\, \mathrm{G}(x))$
(I)	**Qualche F è G**	$\exists x\ (\mathrm{F}(x) \wedge \mathrm{G}(x))$
(O)	**Qualche F non è G**	$\exists x\ (\mathrm{F}(x) \wedge \neg\, \mathrm{G}(x))$

Le regole di inferenza

Per la prima volta nella storia della logica Frege fa una distinzione esplicita che diverrà fondamentale nel XX secolo; quella tra assiomi logici e regole logiche.

Gli assiomi sono asserti, punti di partenza del sistema logico; le regole non sono asserti, ma strategie inferenziali.

Dell'elenco di regole che si potevano recuperare dalla tradizione Frege riconosce che una sola è sufficiente, la regola del **modus ponens**, o regola di separazione:

$$\vdash (A \supset B)$$
$$\vdash A$$

$$\vdash B$$

SISTEMA FORMALE

LINGUAGGIO	CALCOLO (Apparato Deduttivo)
Vocabolario	Assiomi
Regole di Buona Formazione	Regole di Trasformazione
Formule Ben Formate	Teoremi

I fondamenti logici dell'aritmetica: le origini del "logicismo"

Die

Grundlagen der Arithmetik.

Eine logisch mathematische Untersuchung

über den Begriff der Zahl

von

Dr. G. Frege,

BRESLAU.

Verlag von Wilhelm Koebner.

1884.

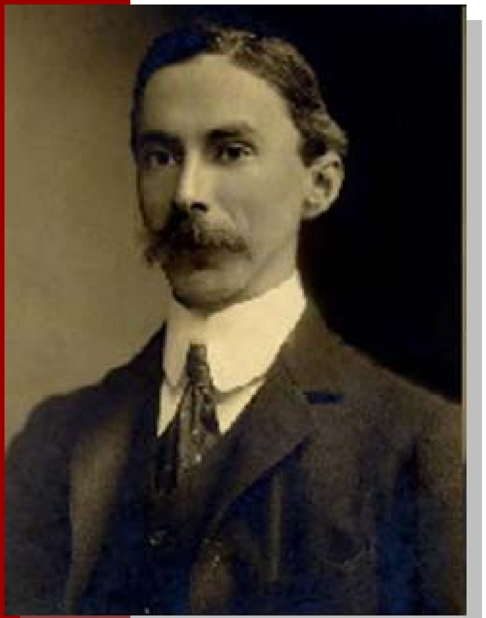
« Frege desiderava costruire una teoria puramente logica dei numeri naturali; ciò gli avrebbe permesso di dimostrare che l'aritmetica e anzi tutta la matematica […] poteva essere considerata un ramo della logica.

[…]

Nei due volumi del suo trattato sui fondamenti dell'aritmetica Frege spiegava come costruire l'aritmetica dei numeri naturali usando la logica messa a punto nell'Ideografia »

Martin Davis, *Il calcolatore universale* (2000)

Giugno 1902:
Bertrand Russell scrive a Frege

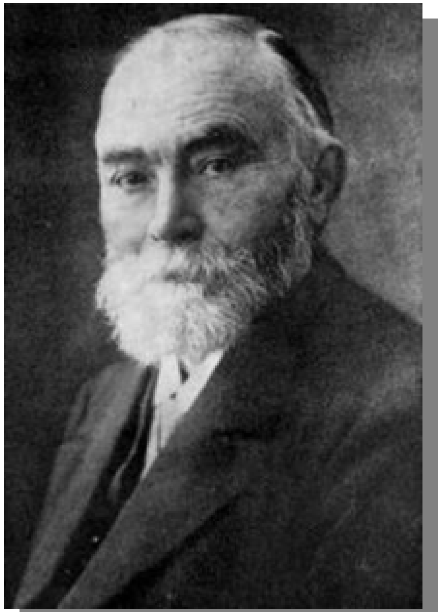


Friday's Hill, Haslemere,
16 giugno 1902

« Caro collega,

[...] io mi trovo in completo accordo con lei in tutte le cose essenziali, particolarmente quando lei respinge ogni momento psicologico nella logica, e quando lei ripone grande valore in una ideografia per la fondazione della matematica e della logica formale, che, sia detto incidentalmente, è ben difficile distinguere. [...]

C'è solo un punto dove io ho incontrato una difficoltà. [...]. »



Il paradosso di Russell (versione del "barbiere")

In un villaggio c'è un unico barbiere. Il barbiere rade tutti (e solo) gli uomini che non si radono da sé.

Chi rade il barbiere?

Gli assiomi di Peano

Giuseppe Peano (1858-1932) mostrò nel 1889 che l'intera teoria dei numeri naturali può essere dedotta da tre idee primitive e da cinque proposizioni fondamentali in aggiunta a quelle della logica pura.

Le tre idee primitive della aritmetica di Peano sono:

0, numero, successore

Le cinque proposizioni primitive sono, invece:

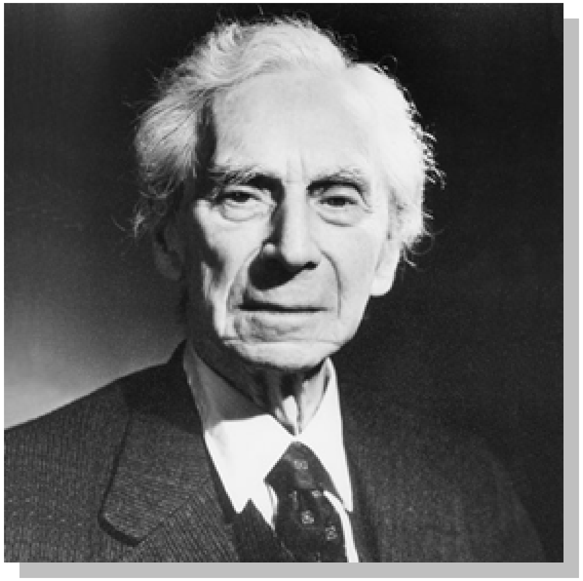
1. 0 è un numero
2. Il successore di ogni numero è un numero
3. Due numeri distinti non possono avere lo stesso successore
4. 0 non è il successore di alcun numero.
5. Se una proprietà vale per 0, ed anche per il successore di ogni numero che abbia quella proprietà, allora vale per tutti i numeri (**principio di induzione**)

I *Principia Mathematica* di Whitehead e Russell (1910–1913)

« Se c'è ancora qualcuno che non ammette l'identità di logica e matematica, lo sfidiamo a indicare in che punto, nella serie di definizioni e deduzioni dei *Prinicipia Mathematica*, la logica finisca e incominci la matematica. »

Bertrand Russell

Introduzione alla filosofia matematica (1919)



SECTION D] THE TRANSFINITE ANCESTRAL RELATION 91

$*257\cdot24.\ \vdash : \text{Hp}\, *257\cdot2 \,.\, \mu \subset \sigma \,.\, \exists ! \mu \,.\, \sim \exists ! \overrightarrow{\max}_Q\text{‘}\mu \,.\supset .\, \breve{R}\text{“}Q_{Rz}\text{“}\mu \subset Q_{Rz}\text{“}\mu$

Dem.

$\vdash .\, *91\cdot52 \,.\, *201\cdot18 \,.\supset \vdash : \text{Hp} \,.\, z \in Q_{Rz}\text{“}\mu \,.\supset .\, \overleftarrow{Q_{Rz}}\text{‘}z = \overleftarrow{(Q_{Rz})_*}\text{‘}\breve{R}\text{‘}z \,.$

$[*37\cdot46 \,.\, *13\cdot12] \qquad \supset .\, \exists ! \overleftarrow{(Q_{Rz})_*}\text{‘}\breve{R}\text{‘}z \cap \mu \,.$

$[*37\cdot46] \qquad \supset .\, \breve{R}\text{‘}z \in (Q_{Rz})_*\text{“}\mu \qquad (1)$

$\vdash .\, *205\cdot123 \,. \qquad \supset \vdash : \text{Hp} \,.\supset .\, \mu \subset Q_{Rz}\text{“}\mu \qquad (2)$

$\vdash .\, (1) \,.\, (2) \,. \qquad \supset \vdash : \text{Hp} \,.\, z \in Q_{Rz}\text{“}\mu \,.\supset .\, \breve{R}\text{‘}z \in Q_{Rz}\text{“}\mu : \supset \vdash .\, \text{Prop}$

$*257\cdot241.\ \vdash : \text{Hp}\, *257\cdot24 \,.\supset .\, \breve{R}\text{“}\{Q_{Rz}\text{“}\mu \cup (\breve{Q}_{Rz})_*\text{“}\overrightarrow{\text{lt}}_Q\text{‘}\mu\} \subset Q_{Rz}\text{“}\mu \subset (\breve{Q}_{Rz})_*\text{“}\overrightarrow{\text{lt}}_Q\text{‘}\mu$

Dem.

$\vdash .\, *90\cdot164 \,.\supset \vdash : R \in Q \,.\supset .\, \breve{R}\text{“}(\breve{Q}_{Rz})_*\text{“}\overrightarrow{\text{lt}}_Q\text{‘}\mu \subset (\breve{Q}_{Rz})_*\text{“}\overrightarrow{\text{lt}}_Q\text{‘}\mu \qquad (1)$

$\vdash .\, (1) \,.\, *257\cdot24 \,.\supset \vdash .\, \text{Prop}$

$*257\cdot242.\ \vdash : \text{Hp}\, *257\cdot24 \,.\, \rho = Q_{Rz}\text{“}\mu \cup (\breve{Q}_{Rz})_*\text{“}\overrightarrow{\text{lt}}_Q\text{‘}\mu \,.$

$\alpha \subset \rho \,.\, \exists ! \alpha \,.\, \sim \exists ! \overrightarrow{\max}_Q\text{‘}\alpha \,.\supset .\, \overrightarrow{\text{lt}}_Q\text{‘}\alpha \subset \rho$

Dem.

$\vdash .\, *206\cdot15 \,. \quad \supset \vdash : \text{Hp} \,.\, \exists ! \mu \cap p\text{‘}\overleftarrow{Q}\text{“}\alpha \,.\, w\, \text{lt}_Q \alpha \,.\supset .\, \exists ! \mu - \overrightarrow{Q}\text{‘}w \qquad (1)$

$\vdash .\, *201\cdot521 \,.\supset \vdash : \text{Hp} \,.\, \mu \subset \sigma \,.\supset .\, \mu - \overrightarrow{Q}\text{‘}w \subset \overleftarrow{Q_*}\text{‘}w \qquad (2)$

$\vdash .\, (1) \,.\, (2) \,. \quad \supset \vdash : \text{Hp}(1) \,.\supset .\, \exists ! \mu \cap \overleftarrow{Q_*}\text{‘}w \qquad (3)$

$\vdash .\, *205\cdot123 \,.\supset \vdash : \text{Hp} \,.\supset .\, \mu \subset Q\text{“}\mu \qquad (4)$

$\vdash .\, (3) \,.\, (4) \,. \quad \supset \vdash : \text{Hp}(1) \,.\supset .\, w \in Q_{Rz}\text{“}\mu \qquad (5)$

$\vdash .\, *206\cdot24 \,. \quad \supset \vdash : \text{Hp} \,.\, \mu \subset Q\text{“}\alpha \,.\, \alpha \subset Q\text{“}\mu \,.\supset .\, \overrightarrow{\text{lt}}_Q\text{‘}\alpha = \overrightarrow{\text{lt}}_Q\text{‘}\mu \qquad (6)$

$\vdash .\, *206\cdot15 \,. \quad \supset \vdash : \text{Hp} \,.\, \exists ! \alpha \cap (\breve{Q}_{Rz})_*\text{“}\overrightarrow{\text{lt}}_Q\text{‘}\mu \,.\supset .\, \overrightarrow{\text{lt}}_Q\text{‘}\alpha \subset (\breve{Q}_{Rz})_*\text{“}\overrightarrow{\text{lt}}_Q\text{‘}\mu \qquad (7)$

$\vdash .\, (5) \,.\, (6) \,.\, (7) \,.\supset \vdash .\, \text{Prop}$

$*257\cdot243.\ \vdash : \text{Hp}\, *257\cdot24 \,.\supset .\, (R * Q)\text{‘}x = Q_{Rz}\text{“}\mu \cup p\text{‘}\overleftarrow{Q_{Rz}}\text{“}\mu \quad [*40\cdot53 \,.\, *205\cdot123]$

$*257\cdot25.\ \vdash : \text{Hp}\, *257\cdot24 \,.\supset .\, (R * Q)\text{‘}x = Q_{Rz}\text{“}\mu \cup (\breve{Q}_{Rz})_*\text{“}\overrightarrow{\text{lt}}_Q\text{‘}\mu$

Dem.

$\vdash .\, *257\cdot242 \,.\supset \vdash : \text{Hp} \,.\supset .\, \delta_Q\text{‘}\{Q_{Rz}\text{“}\mu \cup (\breve{Q}_{Rz})_*\text{“}\overrightarrow{\text{lt}}_Q\text{‘}\mu\} \subset Q_{Rz}\text{“}\mu \cup (\breve{Q}_{Rz})_*\text{“}\overrightarrow{\text{lt}}_Q\text{‘}\mu \qquad (1)$

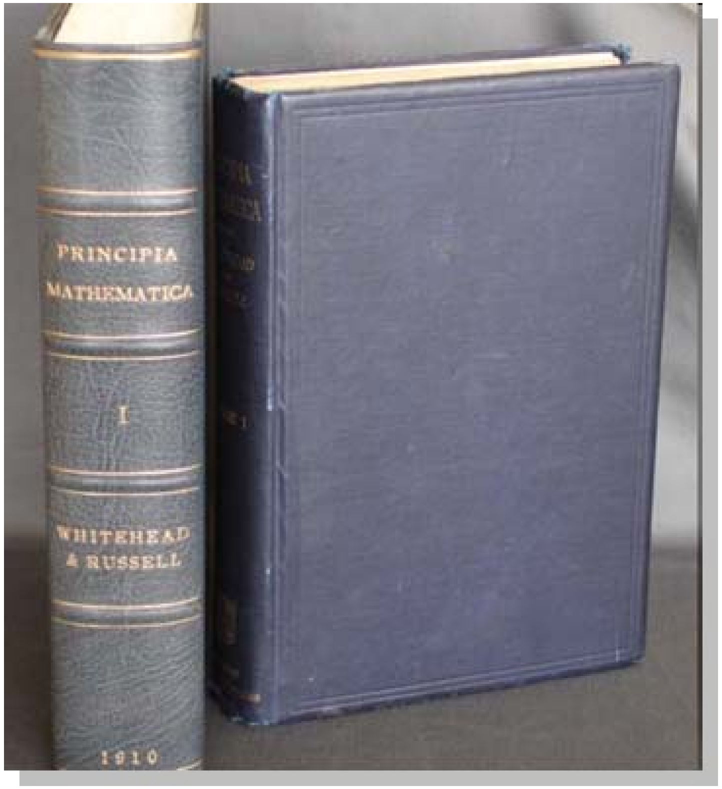
$\vdash .\, (1) \,.\, *257\cdot241 \,.\supset \vdash .\, \text{Prop}$

$*257\cdot251.\ \vdash : \text{Hp}\, *257\cdot24 \,.\supset .\, (\breve{Q}_{Rz})_*\text{“}\overrightarrow{\text{lt}}_Q\text{‘}\mu = p\text{‘}\overleftarrow{Q_{Rz}}\text{“}\mu$

Dem.

$\vdash .\, *257\cdot25\cdot243 \,.\supset \vdash : \text{Hp} \,.\supset .\, Q_{Rz}\text{“}\mu \cup (\breve{Q}_{Rz})_*\text{“}\overrightarrow{\text{lt}}_Q\text{‘}\mu = Q_{Rz}\text{“}\mu \cup p\text{‘}\overleftarrow{Q_{Rz}}\text{“}\mu \,.$

$[*200\cdot53 \,.\, *24\cdot481] \qquad \supset .\, (\breve{Q}_{Rz})_*\text{“}\overrightarrow{\text{lt}}_Q\text{‘}\mu = p\text{‘}\overleftarrow{Q_{Rz}}\text{“}\mu : \supset \vdash .\, \text{Prop}$



Cosa è, quindi, la matematica?

« La matematica pura è quella scienza in cui non sappiamo di che cosa stiamo parlando o se ciò che stiamo dicendo è vero »

Bertrand Russell (1872–1970)

Le geometrie non euclidee

« [La rivoluzione non euclidea] è una rivoluzione scientifica, importante quanto la rivoluzione copernicana in astronomia, la rivoluzione darwiniana in biologia, o quanto la rivoluzione newtoniana o quella del secolo XX in fisica, rivoluzione che è però di gran lunga meno nota perché i suoi effetti sono stati più indiretti: una rivoluzione nata dall'invenzione di un'alternativa alla tradizionale geometria euclidea.»

Richard J. Trudeau, *La rivoluzione non euclidea* (1991)

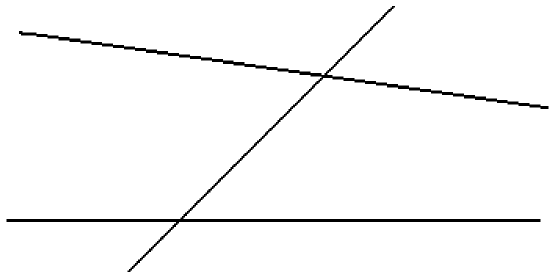
I primi quattro postulati di Euclide

1. Tra due punti qualsiasi è possibile tracciare una ed una sola retta.
2. Si può prolungare una retta oltre i due punti indefinitamente.
3. Dato un punto e una lunghezza, è possibile descrivere un cerchio.
4. Tutti gli angoli retti sono uguali.

Il quinto postulato
(o assioma delle parallele)

POSTULATO V
(versione originale)

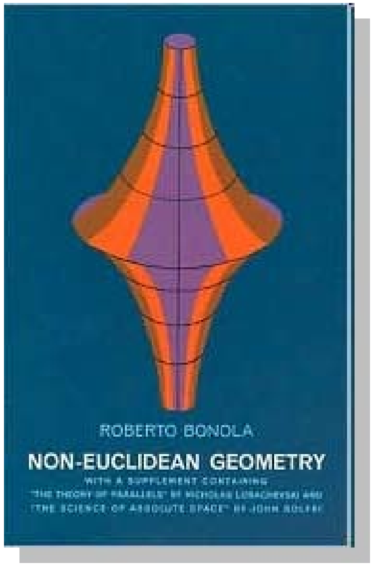
Se una retta taglia altre due rette determinando dallo stesso lato angoli interni la cui somma è minore di quella di due angoli retti, prolungando le due rette, esse si incontreranno dalla parte dove la somma dei due angoli è minore di due retti.



POSTULATO V
(versione di Playfair)

Data una qualsiasi retta *r* ed un punto *P* non appartenente ad essa è possibile tracciare per *P* una ed una sola retta parallela alla retta *r* data.

Dimostrare il V postulato



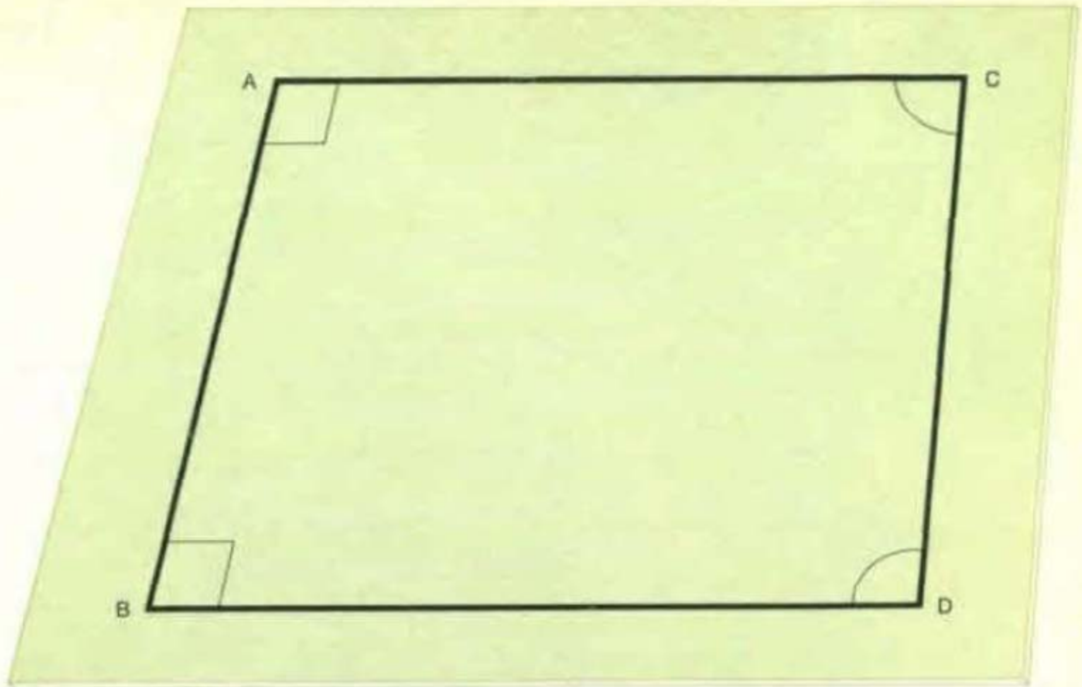
« Venti secoli d'inutili sforzi e segnatamente le ultime infruttuose ricerche sul *V postulato*, indussero molti geometri, fiorenti sul principio del secolo scorso, nella convinzione che l'assetto definitivo della teoria delle parallele costituisse un problema irresolubile. La scuola di Gottinga, fin dal 1763, aveva ufficialmente dichiarato la necessità di rassegnarsi all'ipotesi Euclidea

[…]

Fu Gauss il primo ad avere chiara la visione d'una geometria indipendente dal *V postulato*, visione che per ben cinquant'anni rimase chiusa nella mente del sommo geometra e che venne in luce soltanto dopo le opere di Lobačevskij (1829-30) e G. Bolyai (1832). »

Roberto Bonola, *La geometria non-euclidea* (1906)

L'anticipazione di Girolamo Saccheri (1667–1733)



Una dimostrazione indiretta del quinto postulato d'Euclide fu tentata nel XVIII secolo dal geometra italiano Girolamo Saccheri. Data questa figura, in cui i lati *AC* e *BD* sono paralleli e gli angoli *A* e *B* sono retti, si ricava, usando alcune tra le prime 28 proposizioni d'Euclide (che non si fondano sul quinto postulato) che l'angolo *C* è uguale all'angolo *D*. Saccheri cercò di dimostrare che dalle assunzioni « anti-euclidee » che o *C* o *D* sia maggiore o minore di un angolo retto si ricaverebbe una contraddizione. Nel cercar di fare questo Saccheri dimostrò di fatto alcuni importanti teoremi di geometria non-euclidea che egli, erroneamente, considerò « assurdi ». Accenni a ricerche matematiche straordinariamente simili a queste sono state recentemente scoperti dall'autore di questo articolo nelle opere filosofiche di Aristotele.

Gli strilli dei Beoti

« Nelle ore libere ho pensato anche a un altro tema, che per me è già vecchio di quasi quarant'anni, e cioè ai primi fondamenti della geometria: non so se Le ho mai parlato delle mie vedute in proposito. Anche qui ho consolidato ulteriormente molte cose, e la mia convinzione, che non possiamo fondare la geometria completamente a priori, è divenuta, se possibile, ancora più salda.

Nel frattempo, non mi deciderò ancora per molto tempo a elaborare per una pubblicazione le mie molto estese ricerche sull'argomento, e ciò forse non avverrà mai durante la mia vita, perché temo gli strilli dei Beoti, qualora volessi completamente esprimere le mie vedute… »

Lettera di Gauss a Bessel (27 gennaio 1829)

Il rifiuto della distinzione analitico-sintetico

« Osserverete la stessa cosa (l'incompetenza matematica) nei filosofi contemporanei Schelling, Hegel, Nees von Essembeck, e nei loro seguaci; non vi fanno rizzare i capelli sulla testa con le loro definizioni? Leggete nella storia della filosofia antica quelle che i grandi uomini di quell'epoca, Platone ed altri (escludo Aristotele) davano come spiegazioni.

Ed anche con lo stesso Kant spesso le cose non vanno molto meglio; secondo me, **la sua distinzione fra proposizioni analitiche e sintetiche è una di quelle cose che cadono nella banalità o sono false**. »

Da una lettera di Gauss a Schumacher
(1 novembre 1844)

Le "contraddizioni" della geometria non euclidea

« […] la geometria non euclidea non contiene assolutamente nulla di contraddittorio, sebbene molti dei suoi risultati debbano sulle prime essere ritenuti paradossali; tuttavia scambiare ciò per una contraddizione sarebbe unicamente un'illusione, provocata dalla vecchia abitudine a considerare la geometria euclidea come strettamente vera. »

Da una lettera di Gauss a Schumacher
(12 luglio 1831)

János Bolyai (1802–1860)

« Se comincio col dire che non posso lodare un tale lavoro tu certamente per un istante rimarrai meravigliato; ma non posso dire altro; lodarlo significherebbe lodare me stesso; infatti tutto il contenuto dello scritto, la via seguita da tuo figlio, i risultati ai quali egli perviene coincidono quasi interamente con le meditazioni che ho intrapreso in parte già da trenta-trentacinque anni. Perciò sono rimasto del tutto stupefatto….

Anzi, era mia idea scrivere, col tempo, tutto ciò, perché almeno non perisse con me. E' dunque per me una gradevole sorpresa vedere che questa fatica può essermi ora risparmiata, e sono estremamente contento che sia proprio il figlio del mio vecchio amico ad avermi preceduto in un modo tanto notevole. »

Da una lettera di Gauss Farkas Bolyai, padre di János (1832)

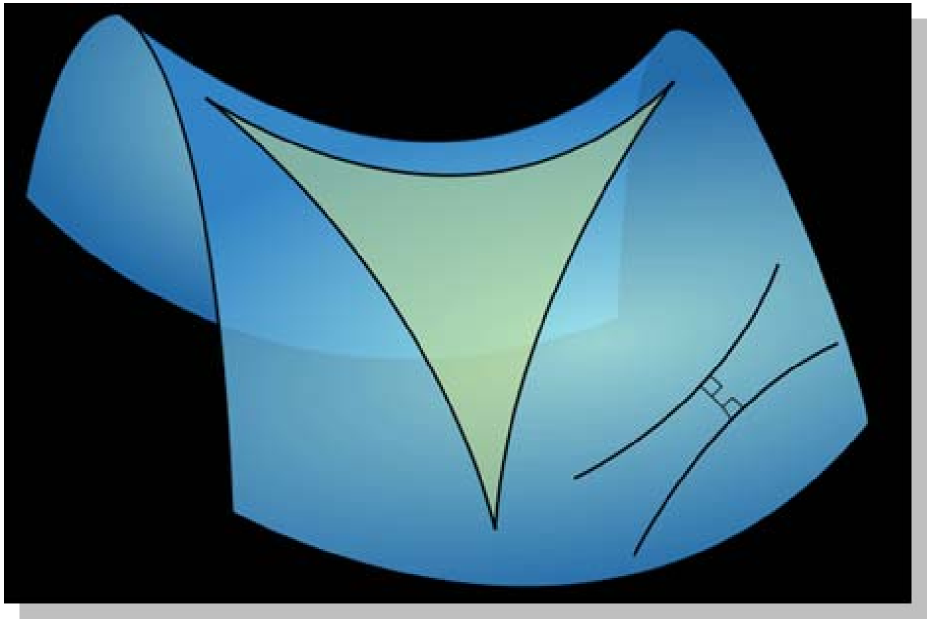
Nikolaj Lobačevskij (1792–1856)

« A tutti è noto che, fino ad oggi, nella geometria la teoria delle parallele era rimasta incompiuta. I vani sforzi [compiuti] dai tempi di Euclide, per il corso di duemila anni, mi spinsero a dubitare che nei concetti stessi [della geometria] non si racchiuda ancora quella verità che si voleva dimostrare, e che può essere controllata, in modo simile alle altre leggi fisiche, soltanto da esperienze quali, ad esempio, le osservazioni astronomiche. »

N. Lobačevskij, *Nuovi principi della geometria* (1835-38)

La geometria iperbolica
(Bolyai- Lobačevskij)

Data una retta *r* e un punto *P* disgiunto da *r*, **esistono almeno due rette distinte** passanti per *P* e parallele a *r*.



Bernhard Riemann (1826–1866)

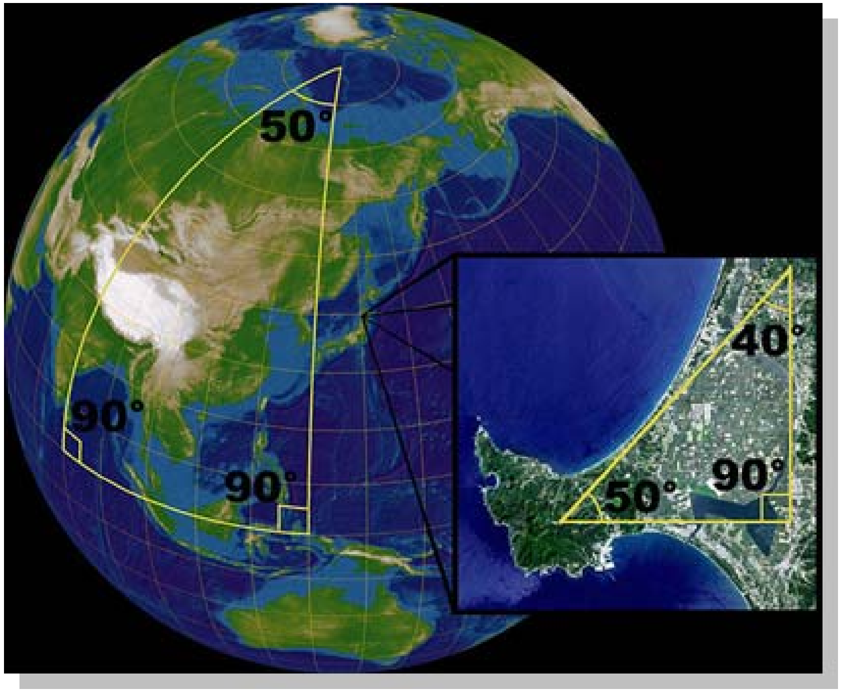
« Con i miei lavori va ora discretamente: all'inizio di dicembre ho consegnato lo scritto di abilitazione e insieme a quello dovevo proporre tre temi per la lezione d'abilitazione, tra i quali la facoltà ne sceglie uno.

I primi due li avevo pronti e speravo che si sarebbe preso uno di quelli: Gauss però aveva scelto il terzo, e così ora sono di nuovo un po' alle strette, poiché questo devo ancora prepararlo. »

B. Riemann in una lettera al fratello (1854)

La geometria ellittica

Data una retta *r* e un punto *P* disgiunto da *r*, **non esiste nessuna retta** passanti per *P* e parallela a *r*.



In sintesi…

tipo di geometria	numero di parallele	somma degli angoli di un triangolo	rapporto della circonferenza al diametro del cerchio	misura della curvatura
Lobačevskij	∞	$< 180°$	$> \pi$	< 0
Euclide	1	$180°$	π	0
Riemann	0	$> 180°$	$< \pi$	> 0

Il “programma” di Hilbert

« La conclusione generale che emerse dai vari studi critici sui fondamenti della matematica fu che la vecchia concezione della matematica come "scienza della quantità" è inadeguata e ingannevole. **Divenne infatti evidente che la matematica è semplicemente la scienza per eccellenza che trae le conclusioni logicamente implicite in un qualsiasi insieme di assiomi o postulati.**

Di fatto, si riconobbe che la validità della deduzione matematica non dipende in alcuna maniera dal particolare significato che può essere associato ai termini o alle espressioni contenute nei postulati. Si vide così che la matematica è molto piú astratta e formale di quanto non si supponesse tradizionalmente. »

Ernest Nagel e James R. Newman

La prova di Gödel (1958)

I *Grundlagen*

« Consideriamo tre diversi sistemi di oggetti: chiamiamo punti gli oggetti del primo sistema e li indichiamo con A, B, C...; chiamiamo rette gli oggetti del secondo sistema e li indichiamo con a,b,c...; chiamiamo piani gli oggetti del terzo sistema e li indichiamo con α, ß...; i punti si chiamano anche gli elementi di geometria della retta, i punti e le rette elementi della geometria piana, i punti, le rette ed i piani gli elementi della geometria solida o dello spazio.
Noi consideriamo punti rette e piani in certe relazioni reciproche e indichiamo queste relazioni con parole come "giacere", "fra", "congruente"; la descrizione esatta e completa, ai fini matematici, di queste relazioni segue dagli assiomi della geometria. »

David Hilbert, *Fondamenti della geometria* (1899)

Il "programma" di David Hilbert (1862-1943)

« Hilbert non soltanto introdusse un sistema di assiomi, che permise di recuperare Euclide rigorosamente, ma compì un salto di qualità: il sistema di assiomi divenne un oggetto di studio a sé stante, e l'interesse si spostò dai teoremi *del* sistema ai teoremi *sul* sistema.

Così facendo, Hilbert pose sulla carta tutta una serie di problemi per sistemi assiomatici che sarebbero diventati classici nella metamatematica posteriore:

- *indipendenza (degli assiomi)*

- *coerenza*

- *completezza* »

Piergiorgio Odifreddi
Divertimento geometrico (2003)

Teorie e telai

« Si comprende da sé che **ogni teoria è solo un telaio**, uno schema di concetti unitamente alle loro mutue relazioni necessarie, e che gli elementi fondamentali possono venir pensati in modo arbitrario. Se con i miei punti voglio intendere un sistema qualunque di enti, per esempio il sistema: amore, legge, spazzacamino…, allora basterà che assuma tutti i miei assiomi come relazione fra questi enti perché le mie proposizioni, per esempio il teorema di Pitagora, valgano anche per essi. **In altre parole: ogni teoria può sempre essere applicata a infiniti sistemi di enti fondamentali.** »

Da una lettera di Hilbert a Frege (29 dicembre 1899)

L'*Entscheindungsproblem*

« Nel 1928 Hilbert pubblicò, insieme al suo allievo Ackermann, uno striminzito manuale di logica. […]

Il libro poneva due problemi […]

Il primo problema consisteva nel dimostrare che la logica del primo ordine era **completa**, cioè che ogni formula che, vista dall'esterno, apparisse valida poteva essere derivata dentro il sistema usando solo le regole proposte dal manuale;

il secondo, noto come l'**Entscheidungsproblem** [*problema della decisione*] di Hilbert, era quello di trovare un metodo che data una formula della logica del primo ordine, determinasse, in un numero finito di passi ben definiti ed effettivi, se essa era o meno valida. »

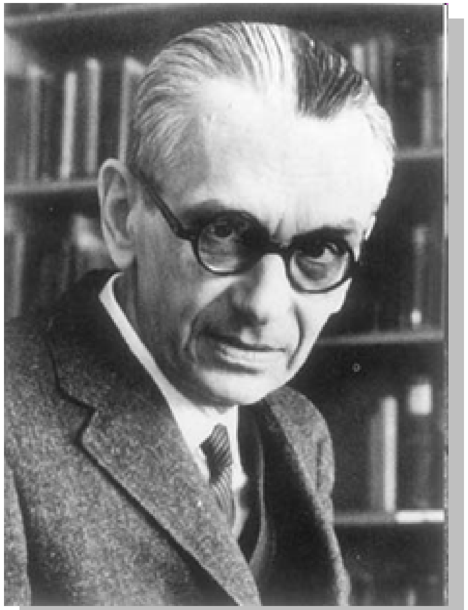
Martin Davis, *Il calcolatore universale* (2000)

Prosciutti e salsicce?

« Sia quindi ben chiaro che per dimostrare un teorema non è necessario e nemmeno vantaggioso sapere che cosa significhi. Il geometra potrebbe essere rimpiazzato dal “pianoforte logico” immaginato da Stanley Jevons; o se si preferisce si può immaginare una macchina dove le assunzioni vengono poste a un suo capo, mentre i teoremi escono fuori dall'altro: come nella leggendaria macchina di Chicago dove i maiali entrano vivi ed escono trasformati in prosciutti e salsicce. »

Jules Henri Poincaré (1854–1912)

Kurt Gödel (1906-1978)



« Lo sviluppo della matematica nella direzione di una maggiore esattezza ha notoriamente condotto a questo, che larghi settori di essa sono stati formalizzati, in modo che il procedimento dimostrativo può essere condotto secondo poche regole meccaniche. […]

Si presenta quindi naturale la congettura che questi assiomi e queste regole di deduzione siano anche sufficienti per decidere tutte quelle questioni matematiche che in genere si possono esprimere formalmente nei rispettivi sistemi.

Nel seguito di questo lavoro si mostra che ciò non accade »

Kurt Gödel,

Sulle proposizioni formalmente indecidibili dei Principia Mathematica *e di sistemi affini* (1931)

L'enunciato di Gödel

Per giungere al teorema, Gödel introdusse nei *Principia Mathematica* qualcosa di analogo al paradosso di Epimenide:

« Tutti i cretesi sono mentitori »

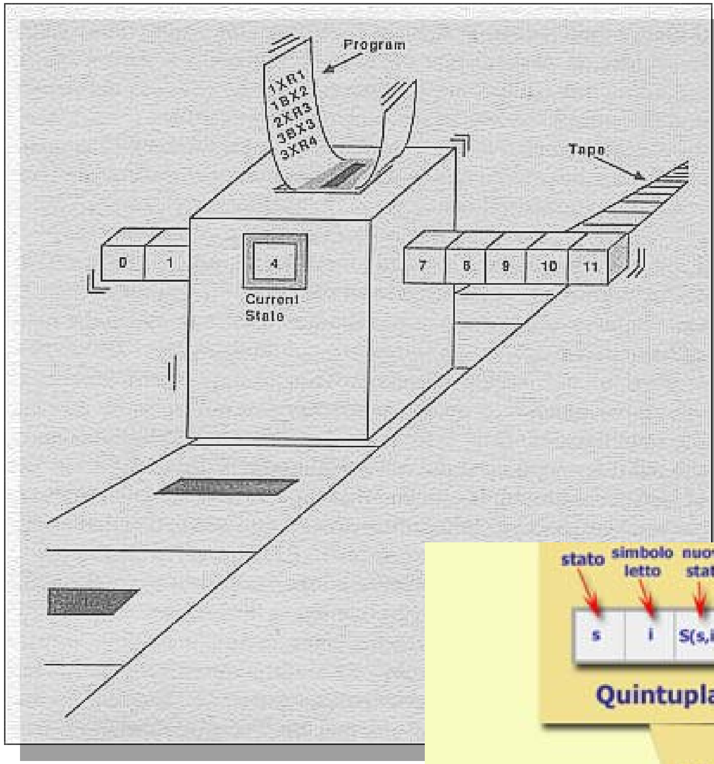
L'equivalente della frase di Epimenide è un enunciato *G* che dice :

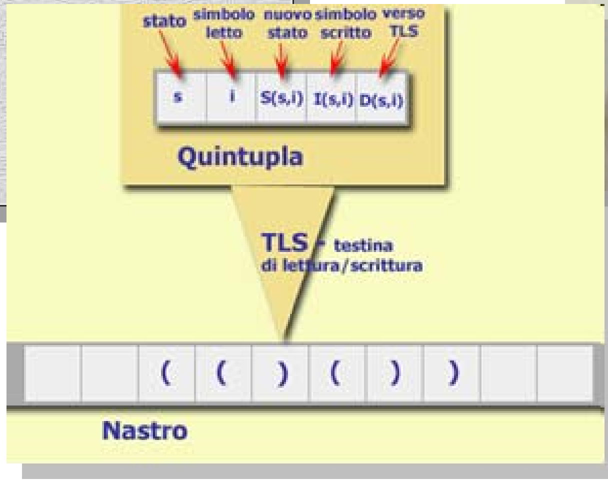
« Questo enunciato dell'aritmetica non ammette alcuna dimostrazione nel sistema dei *Principia Mathematica*. »

« Il risultato di Kurt Gödel nella logica moderna è unico e monumentale — in realtà è più di un monumento, è una pietra miliare che resterà visibile da lontano nello spazio e nel tempo. »

John von Neumann, 1951

La “macchina di Turing”



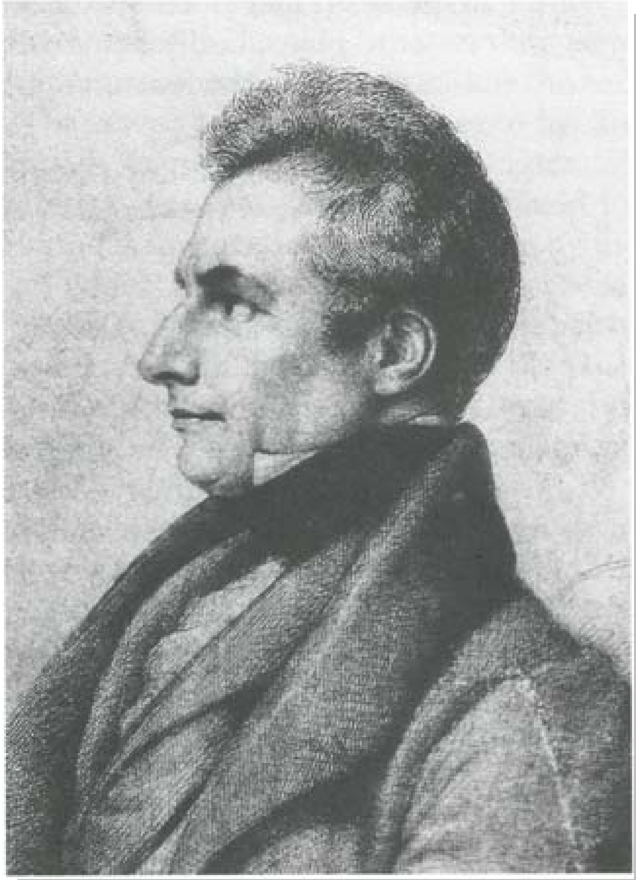


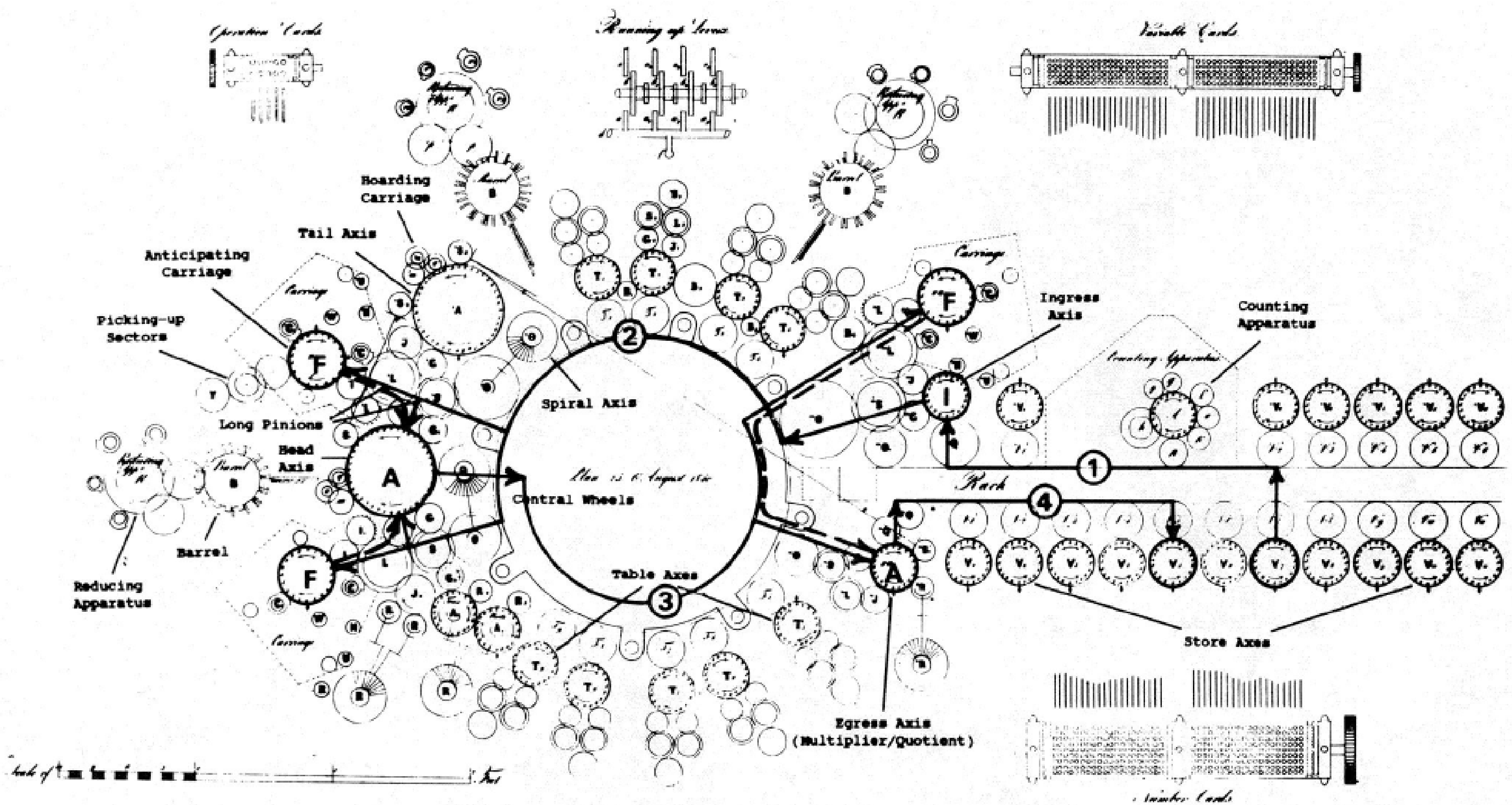
La macchina analitica di Charles Babbage (1792-1871)

« During the last six months I have invented a new machine, of a much greater power: I have abandoned all other research and at present I am making rapid progress, but probably will not have it built at this point.

I am myself astonished at the power which I have been enabled to give it, and which I would not have believed possible a year ago. »

C. Babbage, in una lettera a L. A. J. Quetelet, Maggio 1835.



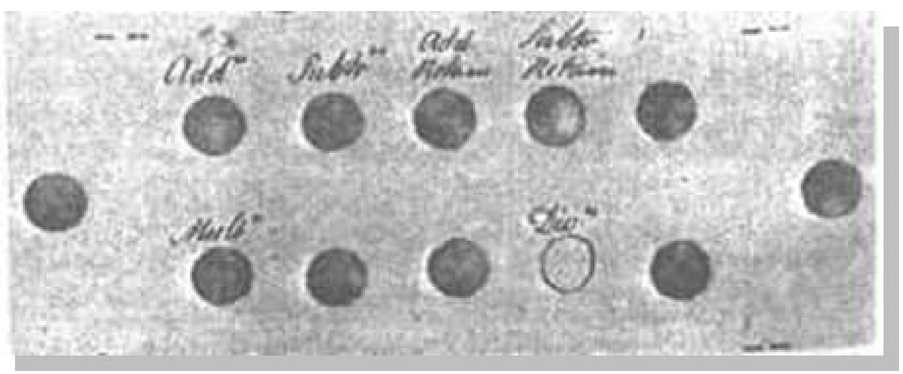


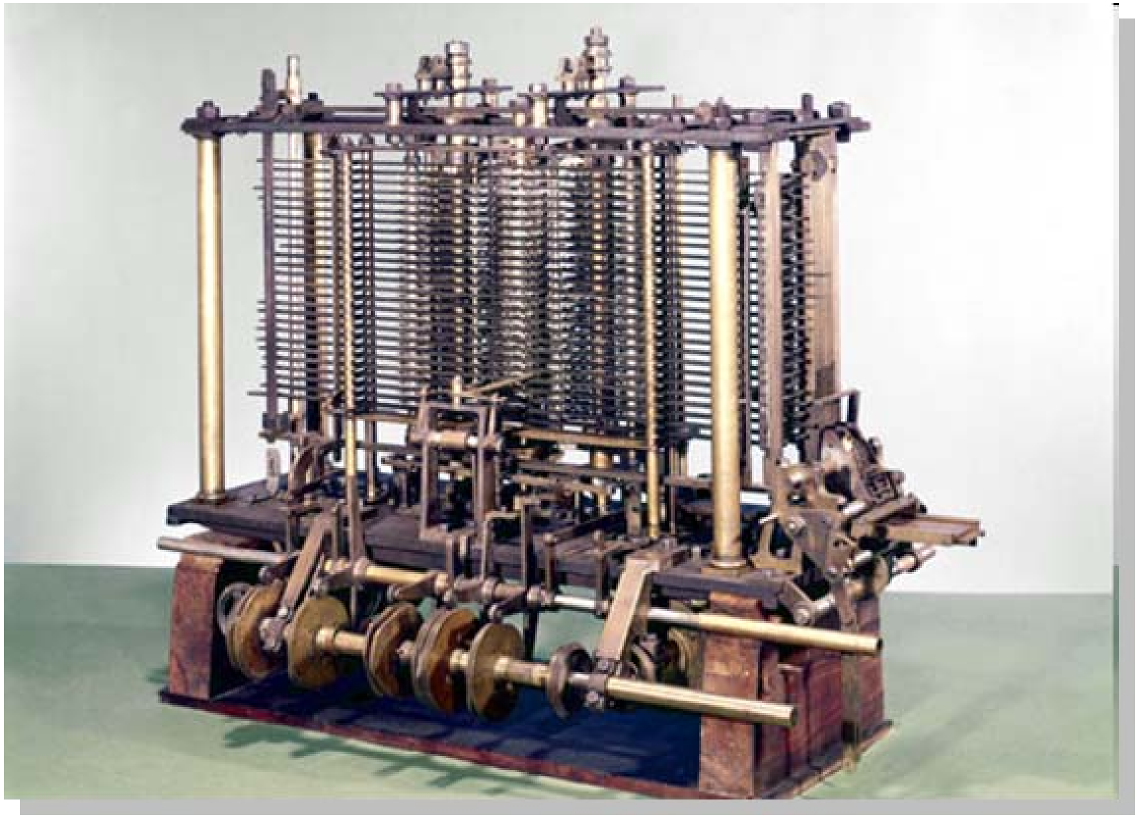
Operation Cards
Running up Levers
Variable Cards
Boarding Carriage
Tail Axis
Anticipating Carriage
Picking-up Sectors
Long Pinions
Head Axis
Barrel
Reducing Apparatus
Spiral Axis
Central Wheels
Table Axes
Ingress Axis
Counting Apparatus
Rack
Store Axes
Egress Axis (Multiplier/Quotient)
Number Cards

Le schede perforate

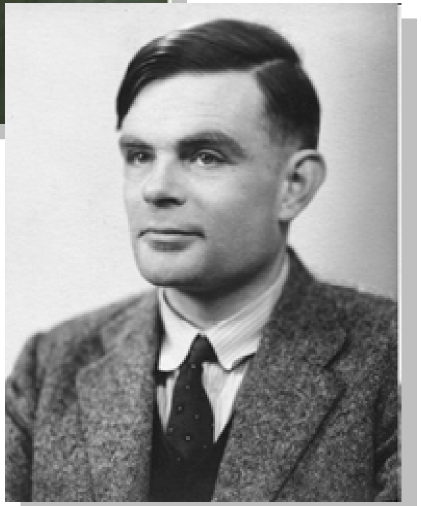
«There are therefore two sets of cards, the first to direct the nature of the operations to be performed--these are called operation cards: the other to direct the particular variables on which those cards are required to operate--these latter are called variable cards.»

C. Babbage, *Passages from the Life of a Philosopher* (1864).





La tesi di Church-Turing



Nella teoria della calcolabilità la **tesi di Church-Turing** è un'ipotesi che afferma:

« se un problema è "intuitivamente" calcolabile, allora esisterà una macchina di Turing (o un dispositivo equivalente, come il computer) in grado di risolverlo (cioè di calcolarlo). »

Più formalmente possiamo dire che la classe delle funzioni calcolabili coincide con quella delle funzioni calcolabili da una macchina di Turing.

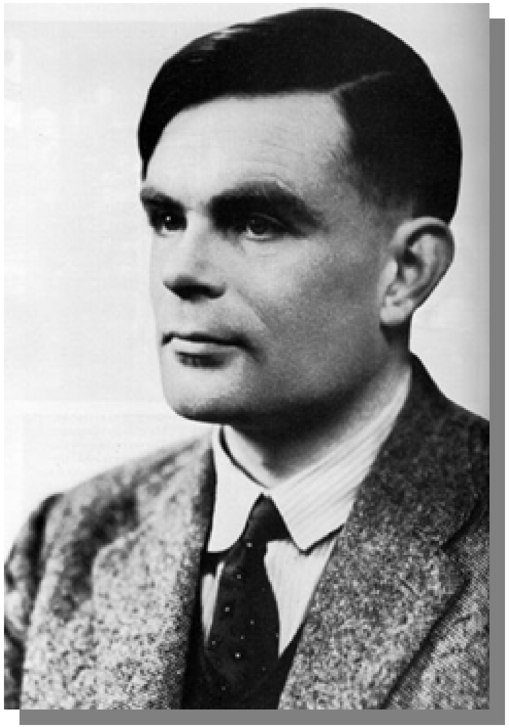
La “macchina universale”

« Torniamo ora all’analogia con le macchine calcolatrici teoriche …

Si può dimostrare che è realizzabile una speciale macchina di questo tipo capace di fare da sola il lavoro di tutte; potremmo addirittura farla funzionare da modello di qualsiasi altra.

Questa macchina speciale può essere chiamata “universale”. »

Alan Turing, 1947

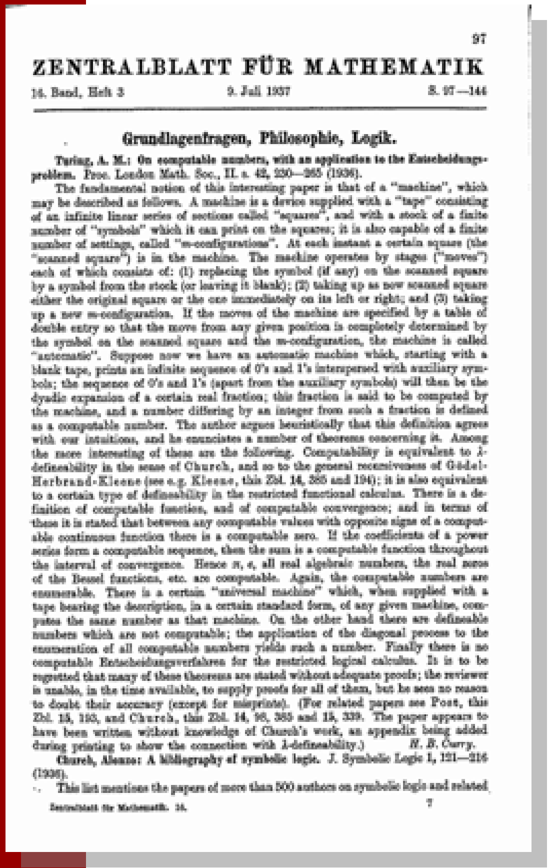


Problemi "indecidibili": il problema della fermata

Non esiste nessuna macchina di Turing che sia in grado di decidere se una macchina di Turing si fermerà.

In altri termini, non esiste nessuna macchina di Turing che, dato l'input (n,m), produca l'output 1 se la macchina di Turing di indice n e di input m si ferma; produca l'output 0 altrimenti.

L’*Entscheidungsproblem* è indecidibile



97

ZENTRALBLATT FÜR MATHEMATIK

16. Band, Heft 3 | 9. Juli 1937 | S. 97—144

Grundlagenfragen, Philosophie, Logik.

Turing, A. M.: On computable numbers, with an application to the Entscheidungsproblem. Proc. London Math. Soc., II. s. 42, 230—265 (1936).

The fundamental notion of this interesting paper is that of a "machine", which may be described as follows. A machine is a device supplied with a "tape" consisting of an infinite linear series of sections called "squares", and with a stock of a finite number of "symbols" which it can print on the squares; it is also capable of a finite number of settings, called "m-configurations". At each instant a certain square (the "scanned square") is in the machine. The machine operates by stages ("moves") each of which consists of: (1) replacing the symbol (if any) on the scanned square by a symbol from the stock (or leaving it blank); (2) taking up as now scanned square either the original square or the one immediately on its left or right; and (3) taking up a new m-configuration. If the moves of the machine are specified by a table of double entry so that the move from any given position is completely determined by the symbol on the scanned square and the m-configuration, the machine is called "automatic". Suppose now we have an automatic machine which, starting with a blank tape, prints an infinite sequence of 0's and 1's interspersed with auxiliary symbols; the sequence of 0's and 1's (apart from the auxiliary symbols) will then be the dyadic expansion of a certain real fraction; this fraction is said to be computed by the machine, and a number differing by an integer from such a fraction is defined as a computable number. The author argues heuristically that this definition agrees with our intuitions, and he enunciates a number of theorems concerning it. Among the more interesting of these are the following. Computability is equivalent to λ-definability in the sense of Church, and so to the general recursiveness of Gödel-Herbrand-Kleene (see e.g. Kleene, this Zbl. 14, 385 and 194); it is also equivalent to a certain type of definability in the restricted functional calculus. There is a definition of computable function, and of computable convergence; and in terms of these it is stated that between any computable values with opposite signs of a computable continuous function there is a computable zero. If the coefficients of a power series form a computable sequence, then the sum is a computable function throughout the interval of convergence. Hence π, e, all real algebraic numbers, the real zeros of the Bessel functions, etc. are computable. Again, the computable numbers are enumerable. There is a certain "universal machine" which, when supplied with a tape bearing the description, in a certain standard form, of any given machine, computes the same number as that machine. On the other hand there are definable numbers which are not computable; the application of the diagonal process to the enumeration of all computable numbers yields such a number. Finally there is no computable Entscheidungsverfahren for the restricted logical calculus. It is to be regretted that many of these theorems are stated without adequate proofs; the reviewer is unable, in the time available, to supply proofs for all of them, but he sees no reason to doubt their accuracy (except for misprints). (For related papers see Post, this Zbl. 15, 193, and Church, this Zbl. 14, 98, 385 and 15, 339. The paper appears to have been written without knowledge of Church's work, an appendix being added during printing to show the connection with λ-definability.) *H. B. Curry.*

Church, Alonzo: A bibliography of symbolic logic. J. Symbolic Logic 1, 121—216 (1936).

This list mentions the papers of more than 500 authors on symbolic logic and related

Zentralblatt für Mathematik. 16. 7

« Hilbert cercava un algoritmo di un’ampiezza senza precedenti; in linea di principio l’algoritmo per l’*Entscheidungsproblem* [problema della decisione] avrebbe dovuto ridurre tutti i ragionamenti deduttivi umani a calcolo bruto, realizzando in buona parte il sogno di Leibniz.

[…]

dopo Gödel era difficile pensare che potesse esistere un algoritmo come quello cercato da Hilbert; e **Alan Turing cominciò a chiedersi come si poteva *dimostrare* che un algoritmo del genere non esisteva.** »

Martin Davis, *Il calcolatore universale* (2000)

Problemi “intrattabili”
La sfida del millennio: P=NP?

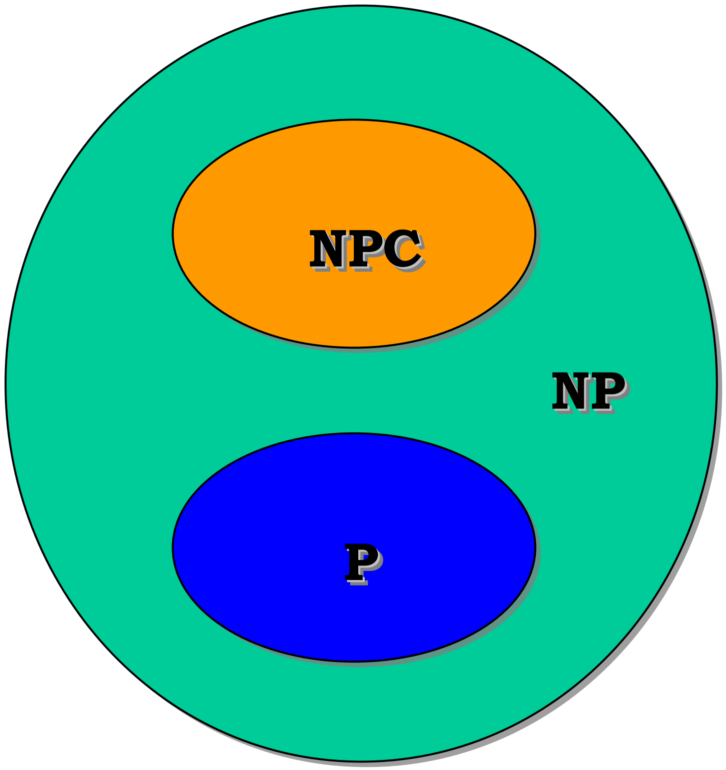
Millennium Problems

« In order to celebrate mathematics in the new millennium, The Clay Mathematics Institute of Cambridge, Massachusetts (CMI) has named seven *Prize Problems*. The Scientific Advisory Board of CMI selected these problems, focusing on important classic questions that have resisted solution over the years.

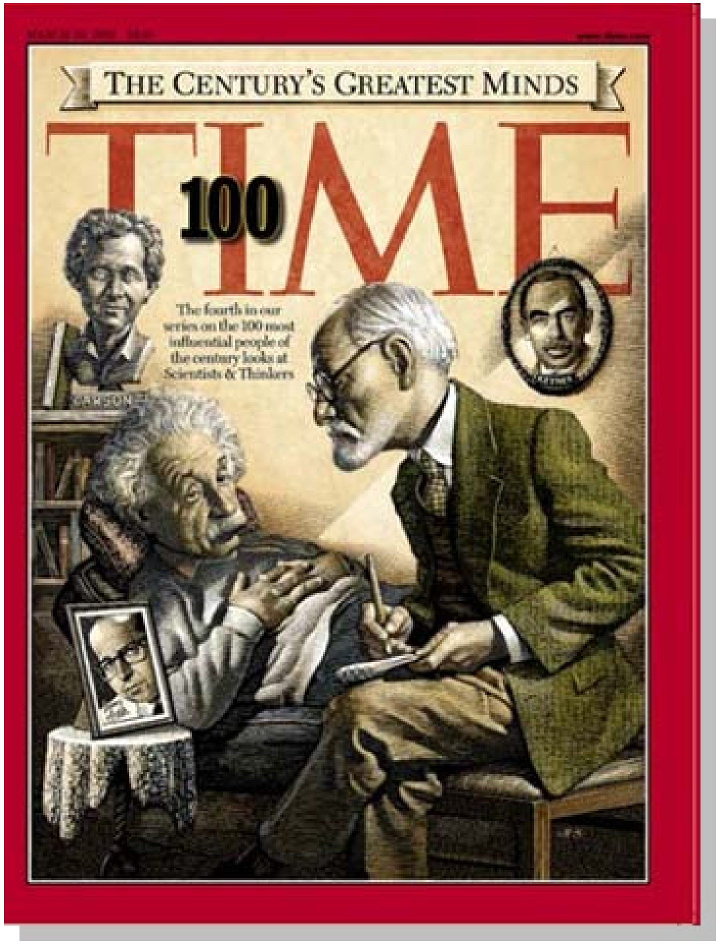
The Board of Directors of CMI designated a $7 million prize fund for the solution to these problems, with $1 million allocated to each.

During the Millennium Meeting held on May 24, 2000 at the Collège de France, Timothy Gowers presented a lecture entitled *The Importance of Mathematics*, aimed for the general public, while John Tate and Michael Atiyah spoke on the problems. The CMI invited specialists to formulate each problem. »

(http://www.claymath.org/millennium/)



Il *TIME* su Turing



« So many ideas and technological advances converged to create the modern computer that it is foolhardy to give one person the credit for inventing it.
But the fact remains that everyone who taps at a keyboard, opening a spreadsheet or a word-processing program, is working on an incarnation of a Turing machine. »

TIME, 29 marzo 1999

Letture

Biblioteca Scientifica 35
Martin Davis
IL CALCOLATORE UNIVERSALE
ADELPHI
Piergiorgio Odifreddi
Il diavolo in cattedra
La logica da Aristotele a Gödel
Einaudi
Gabriele Lolli
Da Euclide a Gödel
il Mulino Saggi
AN INTRODUCTION TO THE PHILOSOPHY OF SCIENCE
Rudolf Carnap
Edited by Martin Gardner