

Calcolo dei Sequenti: i sistemi LJ e LK

mace@dsi.unive.it

Linguaggio. Le lettere maiuscole A, B, C, \dots indicano le *proposizioni atomiche*, cioè quelle che non sono date dalla composizione di altre proposizioni mediante i connettivi. Le lettere P, Q, \dots indicano le proposizioni composte. I connettivi logici sono: $\wedge, \vee, \rightarrow, \neg$. Le costanti logiche sono: \top, \perp . Si usano inoltre le parentesi $()$ come simboli ausiliari, per specificare l'associazione tra connettivi.

Formule ben formate. L'insieme delle formule ben formate è generato dalla seguente produzione:

1. ogni formula atomica A, B, C, \dots è una formula ben formata;
2. le costanti logiche \top e \perp sono formule ben formate;
3. Se P è una formula ben formata, allora anche $\neg P$ è una formula ben formata;
4. Se P e Q sono formule ben formate, allora $P \wedge Q, P \vee Q$ e $P \rightarrow Q$ sono formule ben formate.

Ad esempio per mostrare che $(A \vee B) \rightarrow (C \wedge C)$ è una formula ben formata dobbiamo dire che A, B, C sono formule ben formate perché atomiche, quindi anche $(A \vee B)$ e $(C \wedge C)$ sono ben formate, infine ciò comporta che anche $(A \vee B) \rightarrow (C \wedge C)$ è una formula ben formata. Una formula ben formata, in breve *bf*, può essere dimostrata tale con una derivazione. Le regole da applicare sono

$$\frac{}{A \text{ bf}} \quad \frac{}{\perp \text{ bf}} \quad \frac{}{\top \text{ bf}} \quad \frac{P \text{ bf}}{\neg P \text{ bf}} \quad \frac{P \text{ bf} \quad Q \text{ bf}}{P \wedge Q \text{ bf}} \quad \frac{P \text{ bf} \quad Q \text{ bf}}{P \vee Q \text{ bf}} \quad \frac{P \text{ bf} \quad Q \text{ bf}}{P \rightarrow Q \text{ bf}}$$

Attenzione: queste sono semplicemente regole sintattiche di *buona formazione* delle formule: non hanno nulla a che fare con la semantica! Con queste regole ecco come si mostra che $(A \vee B) \rightarrow (C \wedge C)$ è *bf*:

$$\frac{\frac{A \text{ bf} \quad B \text{ bf}}{(A \vee B) \text{ bf}} \quad \frac{C \text{ bf} \quad C \text{ bf}}{(C \wedge C) \text{ bf}}}{(A \vee B) \rightarrow (C \wedge C) \text{ bf}}$$

Sequenti. Un *sequente* è una espressione del tipo $A_1, \dots, A_n \vdash B_1, \dots, B_m$. In generale si usano le lettere greche maiuscole Γ, Δ, \dots per esprimere sequenze finite (anche vuote) di formule ben formate, e i sequenti si indicano con $\Gamma \vdash \Delta$.

Anatomia di una regola. Le regole del calcolo sono date nelle tabelle seguenti. Vediamo un po' di notazioni. Consideriamo come esempio questa regola:

$$\frac{\Gamma, A \vdash \Delta \quad \Gamma, B \vdash \Delta}{\Gamma, A \vee B \vdash \Delta}$$

Il sequente $\Gamma, A \vee B \vdash \Delta$ è la *conclusione* della regola, i due sequenti $\Gamma, A \vdash \Delta$ e $\Gamma, B \vdash \Delta$ sono le *premesse*.

Questa regola *introduce* a sinistra la formula $A \vee B$, che chiamiamo *formula principale* della regola. Chiamiamo Γ il *contesto* di $A \vee B$.

Table 1 Equazioni Definitorie

(\wedge)	$\Gamma \vdash A \wedge B$	se e solo se	$\Gamma \vdash A$ e $\Gamma \vdash B$
(\vee)	$A \vee B \vdash \Delta$	se e solo se	$A \vdash \Delta$ e $B \vdash \Delta$
(\rightarrow)	$\Gamma \vdash A \rightarrow B$	se e solo se	$\Gamma, A \vdash B$

Table 2 Calcolo dei sequenti di base

Identità	
$A \vdash A$	
Regole di Taglio	
$\frac{\Gamma \vdash A \quad A, \Gamma' \vdash \Delta}{\Gamma, \Gamma' \vdash \Delta} \text{sx}$	$\frac{\Gamma \vdash A, \Delta' \quad A \vdash \Delta}{\Gamma \vdash \Delta, \Delta'} \text{dx}$
Connettivi Logici	
$\frac{A \vdash \Delta}{A \wedge B \vdash \Delta} \quad \frac{B \vdash \Delta}{A \wedge B \vdash \Delta} \wedge \text{rifl. espl.}$	$\frac{\Gamma \vdash A \quad \Gamma \vdash B}{\Gamma \vdash A \wedge B} \wedge \text{form.}$
$\frac{A \vdash \Delta \quad B \vdash \Delta}{A \vee B \vdash \Delta} \vee \text{form.}$	$\frac{\Gamma \vdash A}{\Gamma \vdash A \vee B} \quad \frac{\Gamma \vdash B}{\Gamma \vdash A \vee B} \vee \text{rifl. espl.}$
$\frac{\Gamma, A \vdash B}{\Gamma \vdash A \rightarrow B} \rightarrow \text{form.}$	$\frac{\Gamma \vdash A \quad \Gamma', B \vdash \Delta}{\Gamma, A \rightarrow B, \Gamma' \vdash \Delta} \rightarrow \text{rifl. espl.}$
Costanti Logiche	
$\perp \vdash \Delta \quad \perp \text{ax}$	$\Gamma \vdash \top \quad \top \text{ax}$

Table 3 Regole strutturali

Scambio	
$\frac{\Gamma, A, B \vdash \Delta}{\Gamma, B, A \vdash \Delta}$	$\frac{\Gamma \vdash A, B, \Delta}{\Gamma \vdash B, A, \Delta}$
Indebolimento	
$\frac{\Gamma \vdash \Delta}{\Gamma, A \vdash \Delta}$	$\frac{\Gamma \vdash \Delta}{\Gamma \vdash A, \Delta}$
Contrazione	
$\frac{\Gamma, A, A \vdash \Delta}{\Gamma, A \vdash \Delta}$	$\frac{\Gamma \vdash A, A, \Delta}{\Gamma \vdash A, \Delta}$

Table 4 Negazione

Definiamo $\neg A \stackrel{def}{=} A \rightarrow \perp$. Dalle regole dell'implicazione e l'assioma per il \perp otteniamo le seguenti regole

$$\frac{\Gamma, A \vdash \perp}{\Gamma \vdash \neg A} \neg \text{ form.} \qquad \frac{\Gamma \vdash A}{\Gamma, \neg A \vdash \Delta} \neg \text{ rifl. espl.}$$

Table 5 Calcolo LJ intuizionista (contesto libero a sinistra)

Il calcolo LJ (intuizionista) produce sequenti della forma $\Gamma \vdash C$ (una sola formula nelle conclusioni del sequente). Per ottenere il calcolo dei sequenti LJ si devono quindi considerare le regole di base – Tab. 2 – e quelle per la negazione – Tab. 4 – con contesto libero a sx e una sola assunzione a dx del sequente. Servono inoltre le regole strutturali – Tab. 3 – considerando solo quelle che coinvolgono la parte sx del sequente.

Identità

$$A \vdash A$$

Regola di Taglio

$$\frac{\Gamma \vdash A \quad A, \Gamma' \vdash B}{\Gamma, \Gamma' \vdash B}$$

Connettivi Logici

$$\begin{array}{l} \frac{\Gamma, A \vdash C}{\Gamma, A \wedge B \vdash C} \quad \frac{\Gamma, B \vdash C}{\Gamma, A \wedge B \vdash C} \wedge \text{ rifl. espl.} \qquad \frac{\Gamma \vdash A \quad \Gamma \vdash B}{\Gamma \vdash A \wedge B} \wedge \text{ form.} \\ \frac{\Gamma, A \vdash C \quad \Gamma, B \vdash C}{\Gamma, A \vee B \vdash C} \vee \text{ form.} \qquad \frac{\Gamma \vdash A}{\Gamma \vdash A \vee B} \quad \frac{\Gamma \vdash B}{\Gamma \vdash A \vee B} \vee \text{ rifl. espl.} \\ \frac{\Gamma, A \vdash B}{\Gamma \vdash A \rightarrow B} \rightarrow \text{ form.} \qquad \frac{\Gamma \vdash A \quad \Gamma, B \vdash C}{\Gamma, A \rightarrow B \vdash C} \rightarrow \text{ rifl. espl.} \\ \frac{\Gamma, A \vdash \perp}{\Gamma \vdash \neg A} \neg \text{ form.} \qquad \frac{\Gamma \vdash A}{\Gamma, \neg A \vdash C} \neg \text{ rifl. espl.} \end{array}$$

Costanti Logiche

$$\Gamma, \perp \vdash C \quad \perp \text{ ax}$$

$$\Gamma \vdash \top \quad \top \text{ ax}$$

Regole Strutturali

$$\frac{\Gamma, A, B \vdash C}{\Gamma, B, A \vdash C} \text{ scambio}$$

$$\frac{\Gamma \vdash C}{\Gamma, A \vdash C} \text{ indebolimento}$$

$$\frac{\Gamma, A, A \vdash C}{\Gamma, A \vdash C} \text{ contrazione}$$

Table 6 Calcolo LK classico (contesto libero a sinistra e a destra)

Il calcolo LK (classico) produce sequenti della forma $\Gamma \vdash \Delta$ (sequenze di assunzioni sia a dx che a sx del sequente). Per ottenere il calcolo dei sequenti LJ si devono quindi considerare le regole di base – Tab. 2 – e quelle per la negazione – Tab. 4 – con contesto libero a sx e a dx del sequente. Servono inoltre tutte le regole strutturali – Tab. 3.

Identità	
$A \vdash A$	
Regola di Taglio	
$\frac{\Gamma \vdash A, \Delta \quad \Gamma', A \vdash \Delta'}{\Gamma, \Gamma' \vdash \Delta, \Delta'}$	
Connettivi Logici	
$\frac{\Gamma, A \vdash \Delta}{\Gamma, A \wedge B \vdash \Delta} \wedge \text{ rifl. espl.}$	$\frac{\Gamma \vdash A, \Delta \quad \Gamma \vdash B, \Delta}{\Gamma \vdash A \wedge B, \Delta} \wedge \text{ form.}$
$\frac{\Gamma, B \vdash \Delta}{\Gamma, A \wedge B \vdash \Delta} \wedge \text{ rifl. espl.}$	
$\frac{\Gamma, A \vdash \Delta \quad \Gamma, B \vdash \Delta}{\Gamma, A \vee B \vdash \Delta} \vee \text{ form.}$	$\frac{\Gamma \vdash A, \Delta}{\Gamma \vdash A \vee B, \Delta} \vee \text{ rifl. espl.}$
	$\frac{\Gamma \vdash B, \Delta}{\Gamma \vdash A \vee B, \Delta} \vee \text{ rifl. espl.}$
$\frac{\Gamma, A \vdash B, \Delta}{\Gamma \vdash A \rightarrow B, \Delta} \rightarrow \text{ form.}$	$\frac{\Gamma \vdash A, \Delta \quad \Gamma, B \vdash \Delta}{\Gamma, A \rightarrow B \vdash \Delta} \rightarrow \text{ rifl. espl.}$
$\frac{\Gamma, A \vdash \Delta}{\Gamma \vdash \neg A, \Delta} \neg \text{ form.}$	$\frac{\Gamma \vdash A, \Delta}{\Gamma, \neg A \vdash \Delta} \neg \text{ rifl. espl.}$
Costanti Logiche	
$\Gamma, \perp \vdash \Delta \quad \perp \text{ ax}$	$\Gamma \vdash \top, \Delta \quad \top \text{ ax}$
Regole Strutturali	
$\frac{\Gamma, A, B \vdash \Delta}{\Gamma, B, A \vdash \Delta}$	$\frac{\Gamma \vdash A, B, \Delta}{\Gamma \vdash B, A, \Delta}$
<i>scambio</i>	
$\frac{\Gamma \vdash \Delta}{\Gamma, A \vdash \Delta}$	$\frac{\Gamma \vdash \Delta}{\Gamma \vdash A, \Delta}$
<i>indebolimento</i>	
$\frac{\Gamma, A, A \vdash \Delta}{\Gamma, A \vdash \Delta}$	$\frac{\Gamma \vdash A, A, \Delta}{\Gamma \vdash A, \Delta}$
<i>contrazione</i>	
