

Secondo Teorema di Incompletezza (Note)

mace@dsi.unive.it

4 gennaio 2008

1 Risultati Preliminari

Prima di vedere il teorema di incompletezza, riassumiamo alcuni risultati preliminari che ne permettono la dimostrazione. Tali risultati sono riportati nel libro di testo al paragrafo 5.5.

Consideriamo una *teoria* \mathcal{T} che sia definita su un linguaggio *ling al primo ordine* e che sia:

1. *assiomatizzabile*, ovvero esiste un sottoinsieme di assiomi $\Delta \subseteq \mathcal{T}$ tale che
 - (a) $\Delta \vdash \varphi$ in LK se e solo se $\mathcal{T} \vdash \varphi$ in LK,
 - (b) esiste un modo effettivo per stabilire se una formula è o no un assioma di Δ (ad esempio Δ potrebbe essere finito o potrebbe essere generato da un insieme finito di schemi di assiomi)
2. sufficientemente *espressiva* da contenere l'aritmetica (dei naturali), ovvero nel linguaggio \mathcal{L} di \mathcal{T} è possibile esprimere l'insieme \mathcal{N} dei numeri naturali con le sue operazioni principali: somma, prodotto e divisione con resto.

Grazie al punto 2, ogni intero n è rappresentato da un termine chiuso generato dal linguaggio \mathcal{L} . Indichiamo con \underline{n} il termine chiuso (detto *numerale*) che rappresenta il numero naturale n .

Termini, formule, liste di formule, sequenti e derivazioni sono definiti per induzione. Questo fatto ci permette di associare ad *ogni* oggetto sintattico un numero naturale detto *numero di Gödel* che indichiamo con $\ulcorner \cdot \urcorner$.

Ogni oggetto sintattico può, quindi, essere associato ad un numerale. In altre parole, ogni oggetto sintattico può essere rappresentato da un termine del linguaggio: il particolare numerale che rappresenta il numero di Gödel associato all'oggetto sintattico stesso. In dettaglio, la situazione può essere rappresentata dalla seguente tabella.

	Oggetti sintattici	\longrightarrow	Numeri naturali (\mathcal{N})	\longrightarrow	Termini del linguaggio \mathcal{L}
Termini	t	\longmapsto	$\ulcorner t \urcorner$	\longmapsto	$\underline{\ulcorner t \urcorner}$
Formule	φ	\longmapsto	$\ulcorner \varphi \urcorner$	\longmapsto	$\underline{\ulcorner \varphi \urcorner}$
Liste di formule	Γ	\longmapsto	$\ulcorner \Gamma \urcorner$	\longmapsto	$\underline{\ulcorner \Gamma \urcorner}$
Sequenti	$\Gamma \vdash \Delta$	\longmapsto	$\ulcorner \Gamma \vdash \Delta \urcorner$	\longmapsto	$\underline{\ulcorner \Gamma \vdash \Delta \urcorner}$
Derivazioni	Π	\longmapsto	$\ulcorner \Pi \urcorner$	\longmapsto	$\underline{\ulcorner \Pi \urcorner}$

Grazie alla codifica di Gödel, il la logica può quantificare non solo sugli elementi del modello, ma – implicitamente – anche sui suoi oggetti sintattici. Questo permette l'*autoriferimento*: una formula può esprimere proprietà della teoria stessa.

Il fatto che gli assiomi siano decidibili, ovvero che esiste un metodo effettivo per decidere se una formula è o no un assioma, permette di definire una funzione ricorsiva che verifica se una derivazione è o no una dimostrazione di $\Delta \vdash \varphi$ per qualche formula φ . Intuitivamente la funzione deve partire dalla radice della

derivazione verificando che ci sia un sequente $\Gamma \vdash \varphi$ con $\Gamma \subseteq \Delta$ (per questo serve che Δ sia decidibile!) e, in caso positivo, deve risalire la prova e verificare se le regole del calcolo LK sono state applicate correttamente.

Infine, la logica del primo ordine può esprimere funzioni ricorsive, quindi è possibile definire un predicato binario $Prov(x, y)$ tale che

- $\mathcal{T} \vdash Prov(\underline{m}, \underline{n})$ se esistono Π e φ tali che $m = \ulcorner \Pi \urcorner$ e $n = \ulcorner \varphi \urcorner$, e Π è una derivazione in LK di $\Gamma \vdash \varphi$ con Γ sottoinsieme finito di \mathcal{T} , ovvero Π è una dimostrazione del fatto che $\mathcal{T} \vdash \varphi$ in LK.
- $\mathcal{T} \vdash \neg Prov(\underline{m}, \underline{n})$ altrimenti.

Possiamo allora definire il predicato unario

$$Teor(x) = \exists y Prov(y, x)$$

che gode delle proprietà riportate nella seguente proposizione.

Proposizione 1 (5.49 del Libro di Testo)

1. Se $\mathcal{T} \vdash \varphi$ allora $\mathcal{T} \vdash Teor(\ulcorner \varphi \urcorner)$
2. $\mathcal{T} \vdash Teor(\ulcorner \varphi \urcorner) \rightarrow Teor(\ulcorner Teor(\ulcorner \varphi \urcorner) \urcorner)$
3. $\mathcal{T} \vdash (Teor(\ulcorner \varphi \urcorner) \wedge Teor(\ulcorner \varphi \rightarrow \psi \urcorner)) \rightarrow Teor(\ulcorner \psi \urcorner)$

Sfruttando il Teorema di diagonalizzazione (si veda il Teorema 5.50 del Testo, per l'enunciato e la dimostrazione), il primo teorema di incompletezza dice quanto segue (vi rimando al Libro di Testo per la dimostrazione).

Teorema 2 (Primo Teorema di Incompletezza di Gödel) *Data una teoria \mathcal{T} assiomatizzabile e sufficientemente espressiva da contenere l'aritmetica, è possibile definire una formula G tale che*

$$\mathcal{T} \vdash G \leftrightarrow \neg Teor(\ulcorner G \urcorner).$$

E questo implica

- se \mathcal{T} è consistente, $\mathcal{T} \not\vdash G$;
- se \mathcal{T} è ω -consistente, $\mathcal{T} \not\vdash \neg G$.

2 Secondo Teorema di Incompletezza

Una teoria \mathcal{T} è *consistente* se $\mathcal{T} \not\vdash \perp$, ovvero se \perp non è un teorema in \mathcal{T} . Grazie al predicato $Teor()$ possiamo definire una formula che indica la consistenza della teoria stessa:

$$Cons = \neg Teor(\ulcorner \perp \urcorner)$$

Grazie a questa formula, possiamo provare che una teoria consistente non può provare la sua consistenza, o viceversa che se una teoria dimostra la sua consistenza allora non può altro che essere inconsistente.

Teorema 3 (Secondo Teorema di Incompletezza di Gödel) *Sia \mathcal{T} una teoria assiomatizzabile e sufficientemente espressiva da contenere l'aritmetica. Se \mathcal{T} è consistente allora $\mathcal{T} \not\vdash Cons$.*

Prova. Sia \mathcal{T} una teoria assiomatizzabile e sufficientemente espressiva da contenere l'aritmetica. La teoria \mathcal{T} soddisfa alle ipotesi del primo teorema di incompletezza (Teorema 2). Quindi esiste una formula G che asserisce la propria indimostrabilità, ovvero:

$$\mathcal{T} \vdash G \leftrightarrow \neg \text{Teor}(\ulcorner G \urcorner). \quad (1)$$

Sia inoltre \mathcal{T} consistente. Il Teorema 2 dice che

$$\mathcal{T} \not\vdash G \quad (2)$$

Ora, per provare che $\mathcal{T} \not\vdash \text{Cons}$ basta dimostrare che

$$\mathcal{T} \vdash \text{Cons} \rightarrow G \quad (3)$$

Infatti, supponiamo di avere dimostrato (3). Se fosse $\mathcal{T} \vdash \text{Cons}$ allora potremmo derivare:

$$\frac{\frac{\frac{\Gamma_1 \vdash \text{Cons}}{\Gamma_1, \Gamma_2 \vdash \text{Cons}} \text{Indebolimenti} \quad \frac{\Gamma_2 \vdash \text{Cons} \rightarrow G}{\Gamma_1, \Gamma_2 \vdash \text{Cons} \rightarrow G} \text{Indebolimenti}}{\Gamma_1, \Gamma_2 \vdash \text{Cons} \wedge (\text{Cons} \rightarrow G)} \quad \frac{\text{(Esercizio)}}{\text{Cons} \wedge (\text{Cons} \rightarrow G) \vdash G}}{\Gamma_1, \Gamma_2 \vdash G}$$

con Γ_1 e Γ_2 sottoinsiemi finiti di \mathcal{T} . Quindi otterremmo $\mathcal{T} \vdash G$. Questo va contro il primo teorema di incompletezza che, come ricordato in (2), dice $\mathcal{T} \not\vdash G$. Quindi deve essere $\mathcal{T} \not\vdash \text{Cons}$.

Per chiudere la dimostrazione del secondo teorema di incompletezza, ci resta da provare il punto (3):

$$\boxed{\mathcal{T} \vdash \text{Cons} \rightarrow G}$$

Da (1), per contronominale e doppia negazione otteniamo

$$\mathcal{T} \vdash \text{Teor}(\ulcorner G \urcorner) \leftrightarrow \neg G.$$

e in particolare

$$\mathcal{T} \vdash \neg G \rightarrow \text{Teor}(\ulcorner G \urcorner). \quad (4)$$

questo significa che esiste un sottoinsieme finito Γ di \mathcal{T} tale che $\Gamma \vdash \neg G \rightarrow \text{Teor}(\ulcorner G \urcorner)$ ammette una derivazione Π in LK. Possiamo quindi derivare costruire la derivazione seguente che chiamiamo Π_1

$$\frac{\frac{\frac{\Pi}{\Gamma \vdash \neg G \rightarrow \text{Teor}(\ulcorner G \urcorner)} \quad \frac{\neg G \vdash \neg G \quad \text{Teor}(\ulcorner G \urcorner) \vdash \text{Teor}(\ulcorner G \urcorner)}{\neg G, \neg G \rightarrow \text{Teor}(\ulcorner G \urcorner) \vdash \text{Teor}(\ulcorner G \urcorner)}}{\Gamma, \neg G \vdash \text{Teor}(\ulcorner G \urcorner)} \quad \frac{\text{vedi nota (n1)}}{\Gamma_1, \neg G \vdash \text{Teor}(\neg G)}}{\frac{\Gamma, \Gamma_1, \neg G, \neg G \vdash \text{Teor}(\ulcorner G \urcorner) \wedge \text{Teor}(\ulcorner \neg G \urcorner)}{\Gamma, \Gamma_1, \neg G \vdash \text{Teor}(\ulcorner G \urcorner) \wedge \text{Teor}(\ulcorner \neg G \urcorner)}}$$

Nota. Poichè \mathcal{T} è una teoria assiomatizzabile che contiene l'aritmetica, anche la teoria generata da $\mathcal{T}, \neg G$ è assiomatizzabile e contiene l'aritmetica. Siamo quindi nelle ipotesi della Proposizione 1. Questa osservazione ci permette di asserire due fatti importanti.

(n1) Poichè $\neg G \vdash \neg G$ è derivabile in LK possiamo asserire che $\mathcal{T}, \neg G \vdash \neg G$. Per il punto 1 della Proposizione 1 concludiamo che $\mathcal{T}, \neg G \vdash \text{Teor}(\ulcorner \neg G \urcorner)$, ovvero che esiste Γ_1 sottoinsieme finito di \mathcal{T} tale che $\Gamma_1, \neg G \vdash \text{Teor}(\ulcorner \neg G \urcorner)$ è derivabile in LK.

(n2) Per il punto 3 della Proposizione 1 sappiamo che $\mathcal{T}, \neg G \vdash (\text{Teor}(\ulcorner G \urcorner) \wedge \text{Teor}(\ulcorner G \rightarrow \perp \urcorner)) \rightarrow \text{Teor}(\ulcorner \perp \urcorner)$. Ciò significa che esiste un sottoinsieme finito Γ_2 di \mathcal{T} tale che $\Gamma_2, \neg G \vdash (\text{Teor}(\ulcorner G \urcorner) \wedge \text{Teor}(\ulcorner G \rightarrow \perp \urcorner)) \rightarrow \text{Teor}(\ulcorner \perp \urcorner)$ è derivabile in LK. Da questo otteniamo che¹

$$\Gamma_2, \neg G, \text{Teor}(\ulcorner G \urcorner) \wedge \text{Teor}(\ulcorner G \rightarrow \perp \urcorner) \vdash \text{Teor}(\ulcorner \perp \urcorner)$$

¹Provate lo per esercizio, basta applicare \rightarrow rifl. espl. e un taglio.

è derivabile in LK. Ora, visto che $G \rightarrow \perp$ è appunto $\neg G$ per definizione, possiamo concludere che

$$\Gamma_2, \neg G, \text{Teor}(\underline{\Gamma G}) \wedge \text{Teor}(\underline{\Gamma \neg G}) \vdash \text{Teor}(\underline{\Gamma \perp})$$

è derivabile in LK.

Grazie alla osservazione (n2) possiamo continuare la derivazione come segue:

$$\frac{\frac{\frac{\Pi_1}{\Gamma, \Gamma_1, \neg G \vdash \text{Teor}(\underline{\Gamma G}) \wedge \text{Teor}(\underline{\Gamma \neg G})} \quad \text{vedi nota (n2)}}{\Gamma_2, \neg G, \text{Teor}(\underline{\Gamma G}) \wedge \text{Teor}(\underline{\Gamma \neg G}) \vdash \text{Teor}(\underline{\Gamma \perp})}}{\Gamma, \Gamma_1, \Gamma_2, \neg G, \neg G \vdash \text{Teor}(\underline{\Gamma \perp})}}{\frac{\Gamma, \Gamma_1, \Gamma_2, \neg G \vdash \text{Teor}(\underline{\Gamma \perp})}}{\Gamma, \Gamma_1, \Gamma_2 \vdash \neg G \rightarrow \text{Teor}(\underline{\Gamma \perp})}}$$

Visto che $\Gamma, \Gamma_1, \Gamma_2$ è sottoinsieme finito di \mathcal{T} , concludiamo che

$$\mathcal{T} \vdash \neg G \rightarrow \text{Teor}(\underline{\Gamma \perp})$$

e per contronominale

$$\mathcal{T} \vdash \neg \text{Teor}(\underline{\Gamma \perp}) \rightarrow \neg \neg G$$

quindi (ricordando che siamo in LK)

$$\mathcal{T} \vdash \neg \text{Teor}(\underline{\Gamma \perp}) \rightarrow G$$

cioè

$$\mathcal{T} \vdash \text{Cons} \rightarrow G$$

come volevasi dimostrare. □

Notate che il libro di Testo dimostra una proprietà più forte di quella che abbiamo provato nella nostra dimostrazione. Il Testo mostra che la formula di Gödel G e la consistenza Cons sono addirittura equivalenti in \mathcal{T} .