

# Linguaggio Quotidiano: Formalizzazioni in Logica\*

mace@dsi.unive.it

19 novembre 2007

Cerchiamo di formalizzare il linguaggio corrente usando il linguaggio logico. Ricordo che questo tipo di esercizi non ha una soluzione univoca: dipende dalla interpretazione che viene data ai comuni modi di dire. Cercate di giustificare scelte fatte.

## 1 Due esercizi risolti

**Esercizio 1.** *“Chi studia passa l’esame. Qualche studente non studia. Quindi qualche studente non passa l’esame.” Utilizzando un’opportuna formalizzazione, dire se l’argomento è corretto (specificare in che logica). In caso affermativo, fornire la derivazione. Assumiamo come dominio l’insieme degli studenti.*

**Svolgimento.**  $S(x)$ : “ $x$  studia”,  $P(x)$ : “ $x$  passa l’esame”.

$$\forall x(S(x) \rightarrow P(x)), \exists x\neg S(x) \vdash \exists x\neg P(x)$$

L’implicazione va solo nella direzione “se studia allora passa l’esame.” Questo non mi dice niente degli studenti che passano l’esame, nè di quelli che non studiano. Siamo realisti... Uno studente brillante può essere capace di passare l’esame senza studiare. Oppure può farsi passare il compito...

**Esercizio 2.** *“Bernardo ama Alice. Bernardo ama tutte le donne che non sono complicate. Bernardo può amare una sola donna.” Assumendo come dominio l’insieme delle donne, formalizzare la frase sopra. Si utilizzi il predicato*

$$BA(x) : \quad \text{“Bernardo ama } x\text{”}$$

*ed ogni altro predicato che si ritenga necessario.*

*Dire quale/quale delle seguenti affermazioni sono conseguenza della prima frase, specificando in che logica. Fornire la derivazione di quella/quelle deduzioni che ritenete corrette.*

- a. *“Alice non è complicata.”*
- b. *“Esistono donne che non sono complicate.”*
- c. *“Alice è l’unica donna che può non essere complicata.”*

**Svolgimento.** Prendiamo la costante  $a$  che individua Alice. Utilizziamo il predicato  $NC(x)$ : “ $x$  non è complicata.” Dalla frase iniziale, segue la  $c$ . Infatti possiamo derivare:

$$BA(a), \forall x(NC(x) \rightarrow BA(x)), \forall x\forall y( BA(x) \wedge BA(y) \rightarrow (x = y)) \vdash \forall x(NC(x) \rightarrow (x = a))$$

Ci sono diverse altre formalizzazioni possibili. Sotto ne discutiamo (solo) alcune.

---

\*Queste note risolvono due esercizi assegnati all’appello di esame del 22 giugno 2006 per il corso di Logica Matematica presso l’Università di Padova, a.a.2005/2006.

## Dettagli e commenti

- “Bernardo ama tutte le donne che non sono complicate.”

**Bene:**  $\forall x(NC(x) \rightarrow BA(x))$

Stessa struttura che “Miriam ammira ogni professore”

Notare il senso dell’implicazione: Se una donna non è complicata, Bernardo la ama. Questo non gli impedisce di amare altri tipi di donna.

**Ben distinguere da:** “Bernardo ama solo le donne che non sono complicate.”

**No:**  $\forall x(BA(x) \rightarrow NC(x))$

Questo dice: “Bernardo ama solo le donne che non sono complicate.”

**No:**  $\forall x(BA(x) \wedge NC(x))$

Questo afferma: “tutte le donne sono complicate e amate da Bernardo.”

- Bernardo può amare una sola donna.

Tutte le seguenti vanno bene; le prime due sono più precise rispetto al testo (“Bernardo ama al più una donna”), ma nel complesso tutte sono buone traduzioni.

–  $\forall x\forall y( BA(x) \wedge (BA(y) \rightarrow (x = y)) )$

–  $\exists xBA(x) \rightarrow \forall x\forall y( (BA(x) \wedge BA(y)) \rightarrow (x = y) )$

–  $\exists x( BA(x) \wedge \forall y(BA(y) \rightarrow (x = y)))$

Questa formalizzazione dice: “Bernardo Ama un’unica donna.” È ok perché sappiamo già  $BA(a)$

– ... (altre formulazioni equivalenti)

- “Alice è l’unica donna che può non essere complicata”

ovvero “Se una donna non è complicata, siamo sicuri che è Alice”

1.  $NC(x) \rightarrow (x = a)$

2.  $\forall x(NC(x) \rightarrow (x = a))$

Ancora una volta, *la cosa importante è il senso dell’implica*: se una donna non è complicata, allora Bernardo la ama. Non sappiamo nulla del viceversa. Non sappiamo nemmeno se esistano donne che non sono complicate.

La frase iniziale, può corrispondere a due scenari:

**Scenario 1.** Nel mondo di Bernardo, tutte le donne sono complicate. Quindi  $NC(x)$  non è mai vera. Alice è una donna complicata, come tutte le donne, ma comunque Bernardo la ama.

**Scenario 2.** Nel mondo di Bernardo, esiste un’unica donna che non è complicata. Questa donna è Alice.