

Calcolo dei Sequenti: LJ

mace@dsi.unive.it

9 novembre 2010

D'ora in poi considereremo calcoli di sequenti in cui la regola di scambio è implicita.

In pratica, quando scriviamo $\Gamma \vdash \Delta$ intendiamo che Γ e Δ sono sequenze non ordinate di formule ben formate (anche vuote).

Definizione. Una derivazione che non contiene alcuna applicazione della regola di taglio si dice ‘cut-free.’

Proposizione 1. Se il sequente $\Gamma \vdash A \wedge B$ è derivabile in LJ con una derivazione cut-free, allora anche i sequenti $\Gamma \vdash A$ e $\Gamma \vdash B$ sono derivabili in LJ con derivazioni cut-free.

Dimostrazione. Procediamo per induzione sulla struttura della derivazione cut-free del sequente.

Base dell'induzione. La prova cut-free del sequente $\Gamma \vdash A \wedge B$ è una derivazione di altezza 0. Abbiamo tre casi. Il sequente può essere stato derivato con una istanza della identità o una istanza degli assiomi per \top e \perp .

(i) Se il sequente $\Gamma \vdash A \wedge B$ è derivato per identità, allora $\Gamma = A \wedge B$ e la derivazione è:

$$\frac{}{A \wedge B \vdash A \wedge B} id$$

Ma allora, possiamo semplicemente costruire queste due nuove derivazioni:

$$\frac{\frac{}{A \vdash A} id}{A \wedge B \vdash A} \wedge\text{-rifl} \qquad \frac{\frac{}{B \vdash B} id}{A \wedge B \vdash B} \wedge\text{-rifl}$$

che derivano $\Gamma \vdash A$ e $\Gamma \vdash B$ senza usare tagli.

(ii) Se il sequente $\Gamma \vdash A \wedge B$ è derivato per $\perp\text{-ax}$, allora $\Gamma = \Gamma', \perp$ e la derivazione è:

$$\frac{}{\Gamma', \perp \vdash A \wedge B} \perp\text{-ax}$$

Ma allora, possiamo semplicemente costruire queste due nuove derivazioni:

$$\frac{}{\Gamma', \perp \vdash A} \perp\text{-ax} \qquad \frac{}{\Gamma', \perp \vdash B} \perp\text{-ax}$$

che derivano $\Gamma \vdash A$ e $\Gamma \vdash B$ senza usare tagli.

(iii) Il caso di $\top\text{-ax}$ non è possibile. Infatti, gli unici sequenti derivati come istanza di $\top\text{-ax}$ sono del tipo $\Sigma \vdash \top$, e il sequente $\Gamma \vdash A \wedge B$ non è tra questi.

Passo induttivo. Consideriamo un naturale n maggiore di 0. Dobbiamo assumere che la proposizione sia verificata per tutti i sequenti che hanno una derivazione di altezza minore o uguale a n e provare che essa vale anche per i sequenti con una derivazione di altezza $n + 1$. Formalmente assumiamo

Ip. induttiva: Se $\Sigma \vdash C \wedge D$ è derivabile in LJ con una derivazione cut-free lunga al più n , allora anche $\Sigma \vdash C$ e $\Sigma \vdash D$ sono derivabili in LJ con derivazioni cut-free. (1)

Sia ora $\Gamma \vdash A$ derivabile in LJ con una derivazione cut-free Π di altezza $n + 1$. Dobbiamo distinguere vari casi a seconda dell'ultima regola applicata nella derivazione Π .

Facciamo intanto due semplici osservazioni:

- L'ultima regola applicata non può essere un taglio (Π è cut-free!).
- L'ultima regola applicata *non* può essere una di queste: \vee -*rifl*, \rightarrow -*form*, \neg -*form*. Il motivo è che nella conclusione non comparirebbe una formula come $A \wedge B$ a destra del sequente.

Ora non ci resta che verificare tutti gli altri casi.

(i) Se l'ultima regola che compare in Π è una istanza di \wedge -*form*, allora la derivazione Π è

$$\frac{\frac{\Pi'}{\Gamma \vdash A} \quad \frac{\Pi''}{\Gamma \vdash B}}{\Gamma \vdash A \wedge B}$$

con Π' e Π'' cut-free (perché Π lo è). Ma allora possiamo direttamente concludere che $\Gamma \vdash A$ e $\Gamma \vdash B$ possono essere derivati senza usare tagli (Π' è una derivazione cut-free per $\Gamma \vdash A$, Π'' è una derivazione cut-free per $\Gamma \vdash B$).

(ii) Se l'ultima regola che compare in Π è una istanza di \rightarrow -*rifl*, allora $\Gamma = \Gamma', E \rightarrow F$ e la derivazione Π è

$$\frac{\frac{\Pi'}{\Gamma' \vdash E} \quad \frac{\Pi''}{\Gamma', F \vdash A \wedge B}}{\Gamma', E \rightarrow F \vdash A \wedge B}$$

con Π' e Π'' cut-free e di altezza al più n . In particolare Π'' è una derivazione cut-free per di altezza al più n per $\Gamma', F \vdash A \wedge B$. Posso quindi applicare l'ipotesi induttiva sia su Π' che su Π'' per concludere che esistono due derivazioni Π'_1 e Π''_2 cut-free e tali che

$$\frac{\Pi'_1}{\Gamma', F \vdash A} \quad \frac{\Pi''_2}{\Gamma', F \vdash B}$$

Ma allora posso combinare le derivazioni e ottengo:

$$\frac{\frac{\Pi'}{\Gamma' \vdash E} \quad \frac{\Pi'_1}{\Gamma', F \vdash A}}{\Gamma', E \rightarrow F \vdash A} \quad \frac{\frac{\Pi'}{\Gamma' \vdash E} \quad \frac{\Pi''_2}{\Gamma', F \vdash B}}{\Gamma', E \rightarrow F \vdash B}$$

ovvero $\Gamma \vdash A$ e $\Gamma \vdash B$ sono derivabili senza usare tagli, come volevasi.

(iii) Se l'ultima regola che compare in Π è una istanza di \vee -*form*, allora $\Gamma = \Gamma', E \vee F$ e la derivazione Π è

$$\frac{\frac{\Pi'}{\Gamma', E \vdash A \wedge B} \quad \frac{\Pi''}{\Gamma', F \vdash A \wedge B}}{\Gamma', E \vee F \vdash A \wedge B}$$

con Π' e Π'' cut-free e di altezza al più n . Posso quindi applicare l'ipotesi induttiva, ovvero la proprietà (??), per dire che esistono quattro derivazioni Π'_1 e Π'_2 , Π''_1 e Π''_2 cut-free e tali che

$$\frac{\Pi'_1}{\Gamma', E \vdash A} \quad \frac{\Pi'_2}{\Gamma', E \vdash B} \quad \frac{\Pi''_1}{\Gamma', F \vdash A} \quad \frac{\Pi''_2}{\Gamma', F \vdash B}$$

Posso ancora combinare le derivazioni e ottenere:

$$\frac{\frac{\Pi'_1}{\Gamma', E \vdash A} \quad \frac{\Pi'_2}{\Gamma', E \vdash B}}{\Gamma', E \vee F \vdash A} \quad \frac{\frac{\Pi''_1}{\Gamma', F \vdash A} \quad \frac{\Pi''_2}{\Gamma', F \vdash B}}{\Gamma', E \vee F \vdash B}$$

ovvero $\Gamma', E \vee F \vdash A$ e $\Gamma', E \vee F \vdash B$ sono derivabili senza usare tagli, come volevasi.

(iv) ... Vi lascio da verificare i restanti casi: le regole strutturali, \wedge -*rifl* e \neg -*rifl* (!!attenzione!! in questo ultimo caso non serve utilizzare l'ipotesi induttiva, basta semplicemente "modificare" la prova...)

Dopo aver verificato tutti gli altri casi, il principio di induzione ci permette di affermare che la proposizione vale. \square

Un esercizio consigliato è il seguente.

Proposizione 2. *Sia $\Gamma \vdash \Delta$ un sequente le cui formule sono tutte costruite usando solo i connettivi \vee e \wedge . Se tale sequente è derivabile in LJ, allora Γ è non vuoto.*