Calcolo dei Sequenti Proposizionale: Note ed Esercizi*

mace@dsi.unive.it

11 ottobre 2007

1 Costruire una derivazione

Definizione 1 (Derivazione)**.** *Una derivazione in LJ (rispettivamente LK) è un albero finito con radice unica, in cui i nodi sono (etichettati con) sequenti. I sequenti alle foglie, scritti in alto, devono essere identità (della forma $A \vdash A$) o assiomi (come quelli per $\bot$ e $\top$). Ogni sequente che non è una foglia deve essere ottenuto dai sequenti immediatamente sopra di esso applicando una delle regole di inferenza del calcolo LJ (rispettivamente LK).*

Definizione 2 (Sequente Derivabile)**.** *Un sequente è derivabile in LJ (rispettivamente LK) se il sequente è radice di una derivazione in LJ (rispettivamente in LK).*

Osservazione. Il calcolo LK è una estensione di LJ. Quindi le regole di LJ sono ammissibili anche in LK. Ne segue che ogni sequente derivabile in LJ è derivabile anche in LK. Viceversa, se un sequente *non* è derivabile in LK, allora non è derivabile neppure in LJ (... come ci dice in generale l'Esercizio 4.9).

Esercizio 1. *Usando le regole di inferenza di LJ provate a derivare i sequenti:*

1. $A \wedge B \vdash (A \vee B) \wedge B$
2. $A \vdash B \rightarrow A$
3. $A \vee B \vdash A \wedge B$
4. $A \rightarrow C \vdash (C \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow B)$
5. $A \rightarrow B, C \rightarrow D \vdash (A \wedge C) \rightarrow (B \wedge D)$
6. $B \rightarrow C \vdash (A \vee B) \rightarrow (A \vee C)$
7. $\vdash ((A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow C)) \rightarrow ((A \vee B) \rightarrow C)$
8. $(A \vee C) \wedge (B \vee C) \vdash (A \wedge B) \vee C$
9. $A \rightarrow (A \rightarrow B), A \vdash B$
10. $A \vee B, \neg B \vdash A$
11. $A \rightarrow B, \neg\neg A \wedge \neg B \vdash \bot$
12. $A \vdash \neg\neg A$

*Queste note sono una revisione degli appunti scritti da Claudia Faggian per il corso di Logica Matematica presso l'Università di Padova, a.a.2005/2006.

13. $\vdash (A \wedge \neg A) \to B$

14. $\neg(A \vee B) \vdash \neg A \wedge \neg B$

Se siete riusciti a costruire una derivazione per il punto 3, qualcosa non torna. Forse le regole non sono applicate correttamente?

1.1 Regola d'oro: si lavora dal basso verso l'alto

Quando si cerca una derivazione per un sequente, conviene costruire *dal basso verso l'alto* un albero di derivazione che ha come radice (*conclusione*) il sequente da dimostrare e ha come foglie le identità (cioè sequenti della forma $A \vdash A$) o gli assiomi per $\top$ o $\bot$. L'albero è costruito "impilando" regole di inferenza.

Per costruire una derivazione, si presentano molte scelte possibili. Per esempio, se l'ultima regola applicata fosse un taglio, ci si dovrebbe inventare una nuova formula che non compare nella conclusione. Dal punto di vista di un informatico, una proprietà fondamentale del calcolo dei sequenti (su cui si basano algoritmi di proof-construction, di verifica e specifica dei programmi, ed anche il Prolog) è che è possibile arrangiare le regole in modo da minimizzare l'indeterminismo. Questo garantisce che la ricerca di una derivazione per il sequente $\Gamma \vdash \Delta$ termina o con una derivazione o con la sicurezza che una derivazione *non esiste*. In questo senso, un fondamentale risultato è il seguente (cf. il paragrafo 2.5.1 del libro di testo)

Teorema 1 (Eliminazione dei Tagli)**.** *Se un sequente è derivabile in LJ (rispettivamente in LK) allora esiste una sua derivazione in LJ (rispettivamente in LK) che non contiene nessuna applicazione della regola di taglio.*

Nella strategia di ricerca delle prove, si scrive il sequente da derivare e si cerca di costruire una derivazione, scegliendo ogni volta l'ultima regola che può essere stata applicata in una eventuale derivazione. Ad ogni passo, la domanda da considerare è *"Di quale regola può essere conclusione questo sequente?* Il Teorema 1 di Eliminazione dei Tagli, ci permette di escludere i *tagli* dalle possibili regole da applicare. Quindi, per rispondere, si osserva che formule appaiono nel sequente e ci si chiede *quale connettivo può essere stato introdotto per ultimo.*

Esempio. In LJ, si consideri il sequente $E, E \to F \vdash F$. Qui compare solo il connettivo $\to$, che *si trova a sinistra.* Esiste un'unica regola che introduce $\to$ *a sinistra*, ed ha la forma:

$$\frac{\Gamma \vdash A \quad \Gamma, B \vdash C}{\Gamma, A \to B \vdash C}$$

Facendo corrispondere il sequente $E, E \to F \vdash F$ alla conclusione della regola, si ottiene $\Gamma := E$, $A \to B := E \to F$, $C := F$ e si può scrivere

$$\frac{E \vdash E \quad E, F \vdash F}{E, E \to F \vdash F}$$

Per concludere, si deve ora provare che $E, F \vdash F$ è derivabile. Come si può fare?

1.1.1 Alcuni suggerimenti

- Dall'esempio precedente si capisce che in generale i sequenti della forma $\Gamma, A \vdash A$ sono derivabili per indebolimento da $A \vdash A$.
- È bene ricordare che valgono i seguenti assiomi
  a. $A, A \to B \vdash B$
  b. $A \vdash A \vee B$ e $B \vdash A \vee B$
  c. $A \wedge B \vdash A$ e $A \wedge B \vdash B$

essi sono segnali che si sta costruendo una buona derivazione: quando si trovano questi assiomi, allora le identità si possono ottenere in un passo.

- Le regole di *formazione* possono essere applicate in qualunque momento, senza cambiare la dimostrabilità. Le regole di *riflessione esplicita* obbligano a fare una scelta: $\wedge$ e $\vee$ riflessione esplicita obbligano una scelta tra due formule. Ne segue che se nel sequente compaiono diversi connettivi, e quindi diverse possibilità, conviene cominciare (dal basso) con le regole di formazione (ad applicazione automatica)
- Avere $A \to B$ a sinistra ci permette di liberare B se si assume A.
- Una formula $A \vee B$ a destra può essere trasformata in A oppure in B, a seconda del bisogno, ma si deve cercare di fare questa scelta solo quando si sa cosa serve.
- lo stesso vale per $A \wedge B$ a sinistra (ma in questo caso il problema si può risolvere senza fare scelte, cfr. 1.2.3).

Esempio, esercizio 1.4.

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\cdots}{A, A \to C, C \to B \vdash B}\;1}{A \to C, C \to B \vdash A \to B}}{A \to C \vdash (C \to B) \to (A \to B)}$$

Arrivati al punto [1], sono stati applicati tutti i passi automatici, e si è obbligati a fare delle scelte. Esaminando la situazione, ci si rende conto di aver già finito... A destra appare B. A sinistra, per liberare B serve C, e per liberare C basta fornire A ad $A \to C$. Si decompongono le due implicazioni a sinistra, per esempio:

$$\dfrac{\dfrac{A \vdash A \quad \dfrac{C \vdash C}{A, C \vdash C}}{A, A \to C \vdash C} \quad \dfrac{B \vdash B}{A, A \to C, B \vdash B}\;ind}{A, A \to C, C \to B \vdash B}\;1$$

Esempio, esercizio 1.5.

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\cdots}{A \wedge C, A \to B, C \to D \vdash B}\;1 \quad \dfrac{\cdots}{A \wedge C, A \to B, C \to D \vdash D}\;2}{A \wedge C, A \to B, C \to D \vdash B \wedge D}}{A \to B, C \to D \vdash (A \wedge C) \to (B \wedge D)}$$

Fin qui, sono state applicate tutte semplificazioni automatiche. Per terminare, bisogna decidere cosa fare sopra il punto [1]. Notate che:

- serve un B a sinistra.
- $A \to B$ libera un B se si fornisce un A.
- $A \wedge C$ può essere trasformato in un A.

Per concludere, si può decomporre $A \wedge C$, oppure $A \to B$ (è indifferente), invece $C \to D$ non serve (può essere indebolito). Per esempio:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{A \vdash A}{A \wedge C \vdash A} \quad \dfrac{B \vdash B}{A \wedge C, B \vdash B}}{A \wedge C, A \to B \vdash B}}{A \wedge C, A \to B, C \to D \vdash B}\;1$$

Cosa si fa sopra [2]?

Esempio, esercizio 1.6.

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dots}{A, B \to C \vdash A \vee C}\,1 \quad \dfrac{\dots}{B, B \to C \vdash A \vee C}\,2}{A \vee B, B \to C \vdash A \vee C}}{B \to C \vdash (A \vee B) \to (A \vee C)}$$

Ora si devono fare delle scelte. Sopra [1], si osserva che A appare sia a sinistra che a destra del sequente: basta trasformare $A \vee C$ in A... Sopra [2], a destra si può trasformare $A \vee C$ in A oppure in C. Inoltre a sinistra, fornendo B ad $B \to C$ si libera C. Quindi si può finire con:

$$\dfrac{B \vdash B \quad \dfrac{\dfrac{C \vdash C}{B, C \vdash C}}{B, C \vdash A \vee C}}{B, B \to C \vdash A \vee C}\,2$$

1.2 Regole strutturali

1.2.1 Scambio

Per comodità, nel sequente $\Gamma \vdash \Delta$ consideriamo liste di formule non ordinate. Non espliciteremo mai una applicazione di una regola di scambio.

1.2.2 Indebolimento

La regola di indebolimento, conviene lasciarla alla fine, o almeno quando si sa che cosa serve. Avere delle formule in più (il contesto) non impedisce mai l'applicazione di una regola, ma le assunzioni del contesto possono tornare utili più avanti. In pratica non serve preoccuparsi dell'indebolimento: basta pensarci alla fine. I sequenti della forma $\Gamma, A \vdash A$ sono facilmente derivabili.

1.2.3 Contrazione

La contrazione è un alleato prezioso nelle derivazioni. In pratica, si può agevolmente creare una copia di ogni formula in cui serve una scelta prima di decomporla. Infatti, cercando una prova dal basso verso l'alto *contrazione = creare una copia*. Ad una macchina non disturba portare avanti sequenti con un gran numero di formule, anche se è poco pratico per un essere umano.

Conviene sempre ricordare che, se è ammessa *contrazione a sinistra*, allora tutte le formule a sinistra su cui si è fatta una scelta sono "riutilizzabili". Per esempio, se nel sequente appare la formula $A \wedge B$, e questa viene usata per ottenere A, si può avere ancora una copia di $A \wedge B$. Infatti, si può modificare la derivazione come segue:

$$\dfrac{\Gamma, A \vdash \Delta}{\Gamma, A \wedge B \vdash \Delta} \qquad \textit{può diventare} \qquad \dfrac{\dfrac{\Gamma, A \wedge B, A \vdash \Delta}{\Gamma, A \wedge B, A \wedge B, \vdash \Delta}}{\Gamma, A \wedge B \vdash \Delta}$$

In pratica, se ci si trova ad un punto morto, bisogna chiedersi se aiuterebbe avere ancora presente una delle formule che stanno sotto, e modificare la derivazione scritta di conseguenza (cf. esercizio 8.) Ancora piu' conveniente, e' incorporare la contrazione nella regola, come descritto di seguito.

Proposizione 1. *La seguente regola è ammissibile in LJ*

$$\dfrac{\Gamma, A, B \vdash C}{\Gamma, A \wedge B \vdash C}\ \wedge\text{-}II$$

Dimostrazione. Detto informalmente, bisogna mostrare che si può riempire lo spazio tra premesse e conclusione con regole di inferenza "ufficiali" di LJ. Possiamo agire come segue. Sappiamo che da $A \wedge B$ si ottiene (dal basso verso l'alto) A. Sappiamo che da $A \wedge B$ si ottiene (dal basso verso l'alto) B. Poiché servono sia A sia B, duplichiamo $A \wedge B$ con una contrazione:

$$\cfrac{\cfrac{\cfrac{\Gamma, A, B \vdash C}{\Gamma, A \wedge B, B \vdash C}}{\Gamma, A \wedge B, A \wedge B \vdash C}}{\Gamma, A \wedge B \vdash C}$$

□

Per evitare di essere forzati ad una scelta conviene considerare una variante del calcolo LJ nella ricerca delle derivazioni.

Definizione 3. *Il calcolo LJ-II si ottiene dal calcolo dei sequenti LJ sostituendo le regole di $\wedge$-riflessione esplicita con la regola $\wedge$-II.*

Dobbiamo però essere sicuri che i sequenti derivabili in LJ-*II* sono *tutti e soli* quelli derivabili in LJ, ovvero dobbiamo mostrare che i due calcoli sono equivalenti.

Proposizione 2. *I calcoli LJ ed LJ-II sono equivalenti*

Dimostrazione. La Proposizione 1 ci dice che ogni derivazione in LJ-*II* può essere riscritta come una derivazione di LJ, quindi i sequenti derivabili in LJ-*II* sono anche derivabili in LJ. Viceversa, per poter dire che i sequenti derivabili in LJ sono anche derivabili in LJ-*II*, dobbiamo mostrare che ogni derivazione in LJ può essere riscritta come una derivazione in LJ-*II*. In pratica dobbiamo mostrare che le due regole di $\wedge$-riflessione esplicita sono ammissibili in LJ-*II*. Ecco le derivazioni

$$\cfrac{\cfrac{\Gamma, A \vdash C}{\Gamma, A, B \vdash C}\ ind}{\Gamma, A \wedge B \vdash C}\ \wedge\text{-}II \qquad\qquad \cfrac{\cfrac{\Gamma, B \vdash C}{\Gamma, A, B \vdash C}\ ind}{\Gamma, A \wedge B \vdash C}\ \wedge\text{-}II$$

□

In pratica, nella ricerca di una derivazione in LJ possiamo usare le regole di LJ-*II*. Quando non sappiamo fare una scelta, possiamo sempre usare la regola $\wedge$-*II* (provate con l' esercizio 1.8).

Lo stesso non si può dire per il connettivo $\vee$, visto che LJ non ammette contesto libero a destra del sequente. Tutta la nostra creatività si può concentrare sul connettivo $\vee$ *a destra* ed $\rightarrow$ *a sinistra*.

Un discorso analogo può essere fatto per il sistema LK. Per una discussione dettagliata si veda il paragrafo 2.5.2 del libro di testo. In tal caso si introduce il nuovo sistema LK-*II* che, oltre ad una nuova regola per $\wedge$ ha una regola "con contrazione" anche per $\vee$. Ecco le due regole nel caso classico:

$$\cfrac{\Gamma, A, B \vdash \Delta}{\Gamma, A \wedge B \vdash \Delta}\ \wedge\text{-}II \qquad\qquad \cfrac{\Gamma \vdash A, B, \Delta}{\Gamma \vdash A \vee B, \Delta}\ \vee\text{-}II$$

Nella ricerca delle prove considereremo allora i sistemi LJ-*II*, *al posto di* LJ, *e* LK-*II*, *al posto di* LK.

Esempio, esercizio 1.8. Completare...

$$\cfrac{\cfrac{\cfrac{\cfrac{\vdots}{A, B \vdash (A \wedge B) \vee C} \quad \cfrac{\vdots}{A, C \vdash (A \wedge B) \vee C}}{A, B \vee C \vdash (A \wedge B) \vee C} \quad \cfrac{\cfrac{C \vdash C}{C, B \vee C \vdash C}}{C, B \vee C \vdash (A \wedge B) \vee C}}{A \vee C, B \vee C \vdash (A \wedge B) \vee C}}{(A \vee C) \wedge (B \vee C) \vdash (A \wedge B) \vee C}$$

1.3 La negazione

Quando traduciamo $\neg A$ in $A \to \bot$, abbiamo:

$$\frac{\Gamma \vdash A \quad \bot \vdash \Delta}{\Gamma, A \to \bot \vdash \Delta} \qquad \frac{\Gamma, A \vdash \bot}{\Gamma \vdash A \to \bot}$$

Scriviamo direttamente le seguenti regole:

$$\frac{\Gamma \vdash A}{\Gamma, \neg A \vdash \Delta}\ \neg\textit{-rifl} \qquad \frac{\Gamma, A \vdash \bot}{\Gamma \vdash \neg A}\ \neg\textit{-form}$$

E' importante familiarizzare con queste regole. Notate in particolare che quando costruiamo una derivazione "dal basso verso l'alto":

- Le regole della negazione spostano la formula da una parte all'altra del sequente.
- La regola $\neg$-*rifl* cancella tutto quello che stava a destra (in realtà, sappiamo che il contesto Δ è stato dato da $\bot \vdash \Delta$).

Come nel caso di $\to$, la regola di $\neg$-*form* può essere usata sempre in modo automatico. La regola di riflessione comporta una scelta di *tempistica.* Notate che separiamo Δ dal resto. E se invece avessimo bisogno di qualcosa che sta in quel Δ? Se facciamo la scelta sbagliata, possiamo essere obbligati a tornare sui nostri passi, e provare una derivazione diversa.

Esempio, esercizio 1.10. Cosa succede se al primo passo decomponiamo $\neg B$?

Esempio, esercizio 1.11.

$$\cfrac{\cfrac{\vdots}{A \to B, \neg\neg A, \neg B \vdash \bot}}{A \to B, \neg\neg A \wedge \neg B \vdash \bot}$$

Ora dobbiamo fare una scelta. Possiamo decomporre $A \to B$, oppure $\neg\neg A$, oppure $\neg B$. La scelta non e' indifferente. Provare ad iniziare con $\neg B$. Provare ad iniziare con $\neg\neg A$.

Con uno slogan possiamo dire che *"la negazione sposta le formule."* Cercate di pensare le formule nella posizione che "appartiene loro": $\neg\neg A$ è moralmente una formula che può diventare A, se ha lo spazio di spostarsi senza creare troppi danni (muovendosi da sinistra a destra, cancella la parte destra del sequente); $\neg A$ moralmente "vive" sulla sponda opposta del sequente.

1.3.1 Esempi

Esercizio 1.12

$$\cfrac{\cfrac{A \vdash A}{A, \neg A \vdash \bot}}{A \vdash \neg\neg A}$$

Notare che in LJ *non è possibile derivare* $\neg\neg A \vdash A$ (vedete perché?... chiedetevi quali regole potrebbero essere state applicate per avere una derivazione senza tagli in LJ).

Osservazione. Dal fatto che $\neg\neg A \vdash A$ non è derivabile in LJ, ne segue che anche $\vdash A \vee \neg A$ non è derivabile in LJ. Infatti se $\vdash A \vee \neg A$ fosse derivabile in LJ, allora:

$$\cfrac{\cfrac{\vdots}{\vdash A \vee \neg A} \qquad \cfrac{\cfrac{A \vdash A}{A, \neg\neg A \vdash A} \quad \cfrac{\neg A \vdash \neg A}{\neg A, \neg\neg A \vdash A}}{A \vee \neg A, \neg\neg A \vdash A}}{\neg\neg A \vdash A}$$

e quindi sarebbe derivabile anche $\neg\neg A \vdash A$ e questo è impossibile.

Osservazione. Dal fatto che $\neg\neg A \vdash A$ non è derivabile in LJ, ne segue che anche la regola classica di riduzione ad assurdo (RAA) non è ammissibile in LJ. Infatti, se fosse ammissibile la regola

$$\dfrac{\Gamma, \neg A \vdash \bot}{\Gamma \vdash A}\ \text{RAA}$$

allora si ottiene:

$$\dfrac{\dfrac{\neg A \vdash \neg A}{\neg\neg A, \neg A \vdash \bot}}{\neg\neg A \vdash A}\ \text{RAA}$$

e questo è impossibile.

Esercizio 1.13 Tutti i passi sono obbligati:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{A \vdash A}{A, \neg A \vdash B}}{A \wedge \neg A \vdash B}}{\vdash A \wedge \neg A \rightarrow B}$$

Esercizio 1.14

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\vdots}{A \vdash A \vee B}}{A, \neg(A \vee B) \vdash \bot}}{\neg(A \vee B) \vdash \neg A} \qquad \dfrac{\vdots}{\neg(A \vee B) \vdash \neg B}}{\neg(A \vee B) \vdash \neg A \wedge \neg B}$$

Nota: aiuta avere in mente che in LJ:

- valgono: $A, \neg A \vdash \Delta$ e $A \vdash \neg\neg A$
- non vale: $\neg\neg A \vdash A$

1.4 La dinamica di LJ: contrazione a sinistra e negazione

Sappiamo che

- La *contrazione* (duplicazione) fornisce potere. Quando ci troviamo bloccati, guardare sotto se c'ùna formula che, duplicata, salverebbe la situazione.
- LJ *duplica* formule *solo a sinistra* (LJ non ha contrazione a destra.)
- La *negazione sposta le formule* da una parte all'altra del sequente.

ne segue che LJ ha spazio di manovra solo a sinistra. Non dimenticare che la negazione permette un certo margine di gioco, consentendoci di muovere le formule. In particolare, non dimenticare che possiamo duplicare formule a sinistra, e poi portarle a destra (se sono formule *negate*.)

Se ora vi sentite pronti per una sfida... Esercizio 5.

1.5 Avvertenza: LJ/LK.

Costruire una derivazione in LJ ha uno scopo diverso da costruire una derivazione in LK. In un certo senso, LJ si interessa alla derivazione stessa (scrivere una derivazione è simile a scrivere un programma), mentre LK si interessa piuttosto alla validità delle formule, aderendo alle “tavole di verita”’ (Per esempio, è la logica adatta ad una base dati).

Costruire una derivazione in LJ è più difficile che in LK, perché la derivazione che costruiamo è più informativa, e la dinamica è molto più ricca.

2 Esercizi

Esercizio 2. *Dimostrare che le due seguenti regola sono ammissibili in LJ.*

$$\frac{\Gamma \vdash A \quad \Gamma', B \vdash \Delta}{\Gamma, A \to B, \Gamma' \vdash \Delta} \qquad \frac{\Gamma, A \to B \vdash A \quad \Gamma, A \to B, B \vdash \Delta}{\Gamma, A \to B \vdash \Delta}$$

Esercizio 3. *Costruire una derivazione in LJ per i seguenti sequenti. Gli esercizi con asterisco sono particolarmente raccomandati.*

1. $A \vee (A \wedge B) \vdash A$
2. $A \to B, C \to D \vdash (A \vee C) \to (B \vee D)$ *(*)*
3. $(A \to B) \wedge (B \to C) \vdash (A \to C)$
4. $A \to B \vdash (B \to C) \to (A \to C)$
5. $(B \to C) \wedge (A \to B) \vdash D \to (A \to C)$ *(*)*
6. $(A \to B) \vee (A \to C) \vdash A \to (B \vee C)$
7. $(A \vee (B \to A)) \wedge B \vdash A$ *(*)*
8. $A \to (B \wedge C) \vdash (A \to B) \wedge (A \to C)$
9. $(A \to C) \vee (B \to C) \vdash (A \wedge B) \to C$
10. $A \to (B \to C) \equiv (A \wedge B) \to C$ *(cioè $A \to (B \to C) \vdash (A \wedge B) \to C$ e viceversa)*
11. $\vdash (C \to A) \to ((D \to (A \to B)) \to ((C \wedge D) \to B))$

Esercizio 4. *Costruire una derivazione in LJ per questi sequenti (se possibile):*

1. $\neg A \vdash A \to B$
2. $A \vee B, \neg B \vdash A$
3. $\neg A \vee \neg B \vdash \neg(A \wedge B)$
4. $\neg(A \wedge B) \vdash \neg A \vee \neg B$
5. $A \wedge B \vdash \neg(\neg A \vee \neg B)$
6. $\vdash (\neg A \vee B) \to (A \to B)$
7. $\neg(A \to B) \vdash B \to A$
8. $\neg A \to A \vdash A$
9. $A \to B \vdash \neg B \to \neg A$ *(detto "controniminale")*
10. $\vdash (A \wedge \neg A) \to B$ *(*)*
11. $\neg(A \vee B) \equiv \neg A \wedge \neg B$ *(cioè $\neg(A \vee B) \vdash \neg A \wedge \neg B$ e viceversa)* *(*)*
12. $A \wedge B, \neg A \vee \neg B \vdash \bot$ *(*)*

   Ora potete dire se sono derivabili (senza costruire la derivazione):

   (i.) $A \wedge B \vdash \neg(\neg A \vee \neg B)$

   (ii.) $\neg A \vee \neg B \vdash \neg(A \wedge B)$

13. $A \to B, \neg\neg A \wedge \neg B \vdash \bot$

14. $\neg(A \to B) \equiv \neg\neg A \wedge \neg B$ *(cioè $\neg(A \to B) \vdash \neg\neg A \wedge \neg B$ e viceversa)*

15. $\neg A \vee B \vdash A \to B$ *(*)*

Esercizio 5. *(l'esercizio più difficile che conosco) Costruire una derivazione in LJ di:*

$$A \to B, \neg(\neg A \vee B) \vdash \bot$$

Esercizio 6. *Derivare in LK:*

1. $A \vdash \neg\neg A$

2. $\vdash A \vee \neg A$

3. $A \to B \vdash \neg A \vee B$

4. $\neg(A \wedge B) \equiv (\neg A \vee \neg B)$ *(cioè $\neg(A \wedge B) \vdash (\neg A \vee \neg B)$ e viceversa)*

5. *Esercizio 5 (in LK è banale).*

Esercizio 7. *Provare a derivare in LK i sequenti degli esercizi precedenti che non era possibile derivare in LJ.*